РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД LXVI ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
1.04.2023

Прва година

1. Пресметај го остатокот кој се добива при делење на $2^{4n+2}+2^4$ со $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$, за секој природен број $n\geq 2$.

Решение. Имаме:

$$2^{4n+2}+2^4=\left(2^{2n+1}\right)^2+16=\left(2^{2n+1}\right)^2+2\cdot 2^{2n+1}+1-2\cdot 2^{2n+1}+15=$$
$$=\left(2^{2n+1}+1\right)^2-2^{2n+2}+15=\left(2^{2n+1}+1\right)^2-\left(2^{n+1}\right)^2+15=$$
$$=\left(2^{2n+1}+2^{n+1}+1\right)\left(2^{2n+1}-2^{n+1}+1\right)+15$$

Значи, при делење на $2^{4n+2}+2^4$ со $2^{2n+1}+2^{n+1}+1$ добиваме количник $2^{2n+1}-2^{n+1}+1$ и остаток 15.

2. Најди ги сите природни броеви n така што секоја од цифрите 0, 1, 2, ..., 9, се појавува точно еднаш во броевите n^3 или n^4, но не и во двата броја истовремено.

Пример. Ако треба да се искористат само цифрите 1, 2, 7 и 8, тогаш решение е бројот 3. Секоја од цифрите 1, 2, 7 и 8 се појавува точно еднаш во $3^3=27$ или во $3^4=81$, но не и во двата броја истовремено.

Решение. Ако n е едноцифрен број, тогаш $n^3\leq 9^3=729$ и $n^4\leq 9^4=6561$, односно потребни се најмногу 7 цифри да се напишат броевите n^3 и n^4. Ако n има повеќе од две цифри, тогаш $n^3\geq 100^3=10^6$ и $n^4\geq 100^4=10^8$, па за да се напишат броевите n^3 и n^4 потребни се најмалку 16 цифри. Значи, n е двоцифрен број, па n^3 е најмалку четирицифрен, а n^4 е најмалку петцифрен. Може да заклучиме дека мора n^3 да е четирицифрен, а n^4 да е шестцифрен број (не може двата броја да се петцифрени кога n е двоцифрен). Тогаш $1000\leq n^3\leq 9999$, од каде $10\leq n\leq 21$, а од $100000\leq n^4\leq 999999$, имаме дека $18\leq n\leq 31$. Значи, $n\in\{18,19,20,21\}$. Бидејќи секој од броевите 20^3 и 20^4 завршуваат на 0, а секој од броевите 21^3 и 21^4 завршуваат 1, би постоело повторување на цифрите во записите на броевите, па броевите 20 и 21 не се кандидати за бројот n. Во записот на бројот $19^4=130321$ има повторување на цифрите, па и бројот 19 не е кандидат за бројот n. Бидејќи $18^3=5832$ и $18^4=104976$, бројот 18 единствениот број кој го задоволува бараното својство.

3. Докажи дека $\sqrt{\dfrac{2}{2022}}<\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2021}{2022}<\sqrt{\dfrac{3}{2023}}$.

Решение. За едната страна на неравенството имаме

$$\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2}>\frac{3^2-1}{4^2}\cdot\frac{5^2-1}{6^2}\cdot\frac{7^2-1}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2-1}{2022^2}=\frac{2\cdot 4}{4^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{6^2}\cdot\frac{6\cdot 8}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2020\cdot 2022}{2022^2}=\frac{2}{2022}.$$

За другата страна на неравенството имаме

$$\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{5^2}{6^2}\cdot\frac{7^2}{8^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2}<\frac{3^2}{4^2-1}\cdot\frac{5^2}{6^2-1}\cdot\frac{7^2}{8^2-1}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2022^2-1}=\frac{3^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{5^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{7^2}{7\cdot 9}\cdot\ldots\cdot\frac{2021^2}{2021\cdot 2023}=\frac{3}{2023}.$$

Со коренување се добива точноста на бараните неравенства.

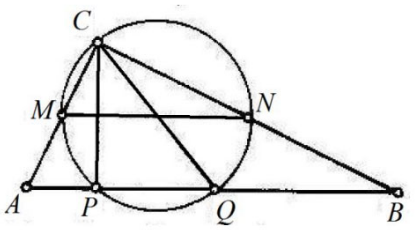
4. Во правоаголен триаголник во кој катетите се однесуваат како 5 : 12, кружницата со дијаметар MN, каде M и N се средини на катетите, ја сече хипотенузата во точките P и Q. Одреди го односот во кој точките P и Q ја делат хипотенузата.

Решение. За катетите на триаголникот важи $\overline{AC}:\overline{BC}=5:12$, од каде $\overline{AC}=5k$, $\overline{BC}=12k$, за некој $k>0$. Тогаш,

$$\overline{AB}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{25k^2+144k^2}=\sqrt{169k^2}=13k.$$

Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ABC, имаме $\overline{MN}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=\dfrac{13}{2}k$.

Кружницата со дијаметар MN минува низ темето C, затоа што аголот кај темето C е прав агол. Точката која е симетрична на точката C во однос на дијаметарот MN исто така е точка од кружницата со дијаметар MN. Нека е тоа точката P_1. Од $CP_1 \perp MN$ и $MN \| AB$ имаме дека $CP_1 \perp AB$. Бидејќи MN е средна линија на триаголникот ABC, заклучуваме дека точката P_1 лежи и на страната. Значи P_1 е точка и од кружницата и од страната AB, па мора $P_1 \equiv P$ и CP е висината на триаголникот спуштена врз хипотенузата.



За плоштината на триаголникот ABC имаме $P = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{5k \cdot 12k}{2} = 30k^2$, а од друга страна $P = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CP}}{2} = \frac{13k \cdot \overline{CP}}{2}$, од каде $30k^2 = \frac{13k \cdot \overline{CP}}{2}$, односно $\overline{CP} = \frac{60}{13}k.$ Тогаш, од правоаголниот триаголник APC имаме $\overline{AP} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{25k^2 - \frac{3600}{169}k^2} = \sqrt{\frac{625}{169}k^2} = \frac{25}{13}k$.

Нека Q е втората пресечна точка на кружницата со хипотенузата, тогаш од $\measuredangle QPC = 90°,$ имаме дека CQ е дијаметар на кружницата, па $\overline{CQ} = \overline{MN} = \frac{13}{2}k.$ Сега, од правоаголниот триаголник QPC имаме $\overline{PQ} = \sqrt{\overline{CQ}^2 - \overline{CP}^2} = \sqrt{\frac{169}{4}k^2 - \frac{3600}{169}k^2} = \sqrt{\frac{14161}{676}k^2} = \frac{119}{26}k$.

Тогаш, $\overline{QB} = \overline{AB} - \overline{AP} - \overline{PQ} = 13k - \frac{25}{13}k - \frac{119}{26}k = \frac{13}{2}k$ (но и од тоа што $\overline{CQ} = \frac{13}{2}k = \frac{1}{2}\overline{AB}$, заклучуваме дека CQ е тежишна линија во правоаголниот триаголник ABC, па Q е средина на AB, од каде $\overline{QB} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{13}{2}k$).

Конечно, бараниот однос во кој е поделена хипотенузата е $\overline{AP} : \overline{PQ} : \overline{QB} = \frac{25}{13}k : \frac{119}{26}k : \frac{13}{2}k = 50:119:169$.

Втора година

1. Нека парот $(1,1)$ е решение на равенката $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, каде што a и b се ненулти реални параметри. Одреди ги a и b, ако $a^2 + b^2 = \frac{45}{4}$.

Решение. Од $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$ следува $a + b = ab$. Тогаш, $\frac{45}{4} = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (ab)^2 - 2ab$. Решенија на квадратната равенка $(ab)^2 - 2ab - \frac{45}{4} = 0$ се $1 \pm \sqrt{1 + \frac{45}{4}} = 1 \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = 1 \pm \frac{7}{2}$, па имаме $ab = \frac{9}{2}$ или $ab = -\frac{5}{2}$. Значи $a + b = ab = \frac{9}{2}$ или $a + b = ab = -\frac{5}{2}$. Затоа, a и b се решенија на квадратните равенки $z^2 - \frac{9}{2}z + \frac{9}{2} = 0$ или $z^2 + \frac{5}{2}z - \frac{5}{2} = 0$. Решенијата на првата равенка се броевите $\frac{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - \frac{72}{4}}}{2} = \frac{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}}}{2} = \frac{\frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \frac{9 \pm 3}{4}$, а на втората $\frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{40}{4}}}{2} = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{65}{4}}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{65}}{4}$.

Конечно, $a = 3, b = \frac{3}{2}; a = \frac{3}{2}, b = 3$, $a = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}, b = \frac{-5 - \sqrt{65}}{4}$ или $a = \frac{-5 - \sqrt{65}}{4}, b = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}$.

2. Нека z е комплексен број за кој важи $\frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2} \in \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im} z \neq 0$. Докажи дека $|z| = 1$.

Решение. Од дадениот услов имаме

$$\frac{1+z+z^2}{1-z+z^2}=\frac{1-z+z^2+2z}{1-z+z^2}=1+2\frac{z}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$$

$$\frac{z}{1-z+z^2}\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow\frac{1-z+z^2}{z}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1}{z}-1+z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1}{z}+z\in\mathbb{R}$$

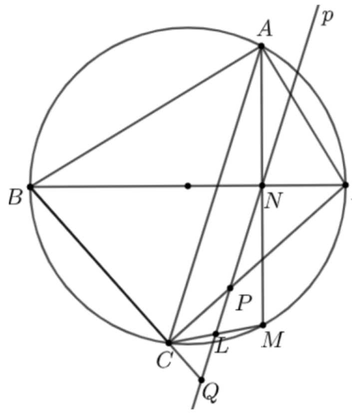
Оттука добиваме, $\frac{1}{z}+z=\frac{1}{\overline{z}}+\overline{z}\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{z}-\frac{1}{\overline{z}}=\overline{z}-z\Leftrightarrow\frac{\overline{z}-z}{|z|^2}=\overline{z}-z\Leftrightarrow\left(\overline{z}-z\right)=|z|^2\cdot\left(\overline{z}-z\right)$.

Од последниот резултат се добива $\left(\overline{z}-z\right)\cdot\left(1-|z|^2\right)=0\Leftrightarrow\overline{z}=z$ и $|z|=1$. Но, заради условот на задачата дека $\operatorname{Im}z\neq0$ следува дека случајот $\overline{z}=z$ не е можен, односно мора $|z|=1$.

3. Реши го системот равенки $\begin{cases}x^2=y^3\\ x+y+\sqrt[5]{xy}=155\end{cases}$ во множеството реални броеви.

Решение. Јасно, $y>0$. Воведуваме смена $y=z^2$, од каде јасно $x=z^3$. Со замена во втората равенка добиваме $z^3+z^2+z-155=0$. Ако трансформираме имаме: $z^3-125+z^2-25+z-5=0$, $(z-5)(z^2+5z+25)+(z-5)(z+5)+z-5=0$, $(z-5)(z^2+5z+25+z+5+1)=0$, $(z-5)(z^2+6z+31)=0$. Од тоа што $z^2+6z+31=(z+3)^2+22>0$ следува дека $z=5$. Тогаш $y=25$, $x=125$.

4. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница со дијаметар BD. Нека M е симетрична точка на точката A во однос на правата BD и $\{N\}=AM\cap BD$. Нека p е права низ точката N, паралелна со правата AC, која ги сече правите CD и BC во точки P и Q, соодветно. Докажи дека точките P,C,Q и M се темиња на правоаголник.



Решение. Нека p ја сече CM во точка L. Бидејќи NL е паралелна со AC и N е средина на отсечката AM, следува дека NL е средна линија во триаголникот ACM, па затоа L е средина на CM.
Од тетивноста, осната симетрија и паралелноста следува:

$$\angle PCL=\angle DCM=\angle DBM=\angle DBA=\angle DCA=\angle PCA=\angle CPL,$$

па триаголникот CLP е рамнокрак и важи $\overline{CL}=\overline{LP}$.
Од друга страна, од тетивноста и паралелноста добиваме и дека

$$\angle MCQ=90^\circ-\angle MCD=90^\circ-\angle MAD=\angle BDA=\angle BCA=\angle CQL,$$

па затоа и триаголникот CQL е рамнокрак и важи $\overline{CL}=\overline{LQ}$.
Од $\overline{CL}=\overline{LP}$ и $\overline{CL}=\overline{LQ}$ следува дека $\overline{LP}=\overline{LQ}$. Сега дијагоналите CM и PQ на четириаголникот $PCQM$ се преполовуваат со L, па оттаму четириаголникот $PCQM$ е паралелограм, а бидејќи $\angle PCQ=90^\circ$ следува дека тој е правоаголник.

Трета година

1. Во множеството на реални броеви $\mathbb{R}$, реши го системот равенки $\begin{cases}\log_{y-x^3}\left(x^3+y\right)=2^{y-x^3}\\ \frac{1}{9}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)=6^{x^3-y}\end{cases}$.

Решение. Од дефинираноста на логаритамската функција имаме дека $y-x^3>0$, $y-x^3\neq1$, $x^3+y>0$, $x^3+y\neq1$. Од тоа што $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$, имаме дека

$$\begin{cases}\log_{y-x^3}\left(x^3+y\right)=2^{y-x^3}\\ \frac{1}{9}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)=6^{x^3-y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot2^{y-x^3}=1\\ \frac{1}{9}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot6^{y-x^3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot2^{y-x^3}=1\\ \frac{1}{9}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot2^{y-x^3}\cdot3^{y-x^3}=1\end{cases}.$$

Со замена на првата во втората равенка од последниот систем, добиваме дека

$$\begin{cases}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot 2^{y-x^3}=1\\ \frac{1}{9}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot 2^{y-x^3}\cdot 3^{y-x^3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot 2^{y-x^3}=1\\ \frac{1}{9}\cdot 3^{y-x^3}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot 2^{y-x^3}=1\\ 3^{y-x^3}=3^2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{x^3+y}\left(y-x^3\right)\cdot 2^{y-x^3}=1\\ y-x^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\log_{x^3+y}2\right)\cdot 2^2=1\\ y-x^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{x^3+y}2=\frac{1}{4}\\ y-x^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+y=16\\ y-x^3=2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2y=18\\ y-x^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=9\\ y-x^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=9\\ x^3=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=9\\ x=\sqrt[3]{7}\end{cases}.$$

Според тоа, системот има единствено решение $(x,y)=\left(\sqrt[3]{7},9\right)$.

2. Во множеството на природни броеви $\mathbb{N}$, реши ја равенката $x^{5-x}=(6-x)^{1-x}$.

Решение. Лесно се проверува дека за $x<7$, решенија на равенката се $x=1$ и $x=5$. Нека $x\geq 7$. Ако x е парен број, тогаш $(6-x)^{1-x}<0$ и $x^{5-x}>0$, па во овој случај дадената равенка нема решение. Значи мора x да е непарен број. Нека $x=2k+1,\ k\geq 3$. Дадената равенка ја трансформираме на следниот начин:

$$(2k+1)^{4-2k}=(5-2k)^{-2k}\Leftrightarrow(2k+1)^{2k-4}=(5-2k)^{2k}\Leftrightarrow(2k+1)^{2k-4}=(5-2k)^{2k-4}\cdot(5-2k)^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2k+1}{5-2k}\right)^{2k-4}=(2k-5)^4\Leftrightarrow\left(1+\frac{6}{2k-5}\right)^{2k-4}=(2k-5)^4.$$

Следува, $2k-5\in\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm6\}$. Но $2k-5$ е непарен број, па $2k-5\in\{\pm1,\pm3\}$. Ако $2k-5\in\{-1,3\}$, тогаш $2k+1<7$. Ако $2k-5\in\{1,3\}$, тогаш $2k+1\in\{7,9\}$. Со проверка заклучуваме дека $x=2k+1=9$ е решение. Значи, решенијата на равенката се $x=1$, $x=5$ и $x=9$.

3. Нека x,y,z се реални броеви.

а) Докажи дека, ако $x+y+z=0$, тогаш $|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|\geq 1$.

б) Определи ја најмалата вредност на изразот

$$|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|+|\cos(x-y)|+|\cos(y-z)|+|\cos(z-x)|.$$

Решение. Нека x,y,z се реални броеви.

а) Користејќи неравенство на триаголник, својства на апсолутна вредност и $|\sin\alpha|\leq 1, |\cos\alpha|\leq 1$, може да запишеме

$$1=|\cos(x+y+z)|=|\cos x\cos(y+z)-\sin x\sin(y+z)|\leq|\cos x|\cdot|\cos(y+z)|+|\sin x|\cdot|\sin(y+z)|\leq$$

$$\leq|\cos x|+|\sin(y+z)|=|\cos x|+|\sin y\cos z+\sin z\cos y|\leq|\cos x|+|\sin y|\cdot|\cos z|+|\cos y|\cdot|\sin z|\leq|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|.$$

Значи ја добивме точноста на тврдењето.

б) Го применување тврдењето под а) за следните подредени тројки: $(-x,y,x-y),(-y,z,y-z),(-z,x,z-x)$ и $(x-y,y-z,z-x)$. Од парноста на функцијата $\cos x$, директно добиваме дека

$$|\cos x|+|\cos y|+|\cos(x-y)|\geq 1,$$

$$|\cos y|+|\cos z|+|\cos(y-z)|\geq 1,$$

$$|\cos z|+|\cos x|+|\cos(z-x)|\geq 1,$$

$$|\cos(x-y)|+|\cos(y-z)|+|\cos(z-x)|\geq 1.$$

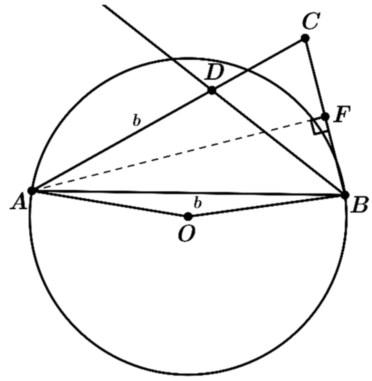
Со собирање на левите и десните страни на неравенствата добиваме дека

$$2\left(|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|+|\cos(x-y)|+|\cos(y-z)|+|\cos(z-x)|\right)\geq 4$$

$$|\cos x|+|\cos y|+|\cos z|+|\cos(x-y)|+|\cos(y-z)|+|\cos(z-x)|\geq 2.$$

Најмалата вредност на изразот се достигнува за $\left(0,\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ и тој е еднаков на 2.

4. Нека A и B се различни точки на кружницата k. Нека C е точка различна од B таква што $\overline{AB}=\overline{AC}$ и BC е тангента на кружницата. Симетралата на $\angle ABC$ ја сече отсечката AC во точката D и D е во внатрешноста на кружницата k. Докажи дека $\angle ABC > 72^\circ$.



Решение. Нека O е центарот на кружницата k, $\overline{AB}=\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$, $\angle ABC=\beta$. Од правоаголниот триаголник BFA имаме $\cos\beta=\frac{a}{2b}$. BC е тангента па $\angle ABO=90^\circ-\beta$, а BD е симетрала на аголот β, од каде $\angle OBD=90^\circ-\frac{\beta}{2}$. Од рамнокракиот триаголник AOB добиваме и дека $\overline{OB}=\frac{\overline{AB}}{2\cos\angle ABO}=\frac{b}{2\sin\beta}$.

Бидејќи BD е симетрала на $\angle ABC$, добиваме $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$. Тогаш $\frac{b}{a}=\frac{b-\overline{CD}}{\overline{CD}}$, односно $b\cdot\overline{CD}=ab-a\cdot\overline{CD}$. Добиваме дека $(a+b)\cdot\overline{CD}=ab$, од каде следува $\overline{CD}=\frac{ab}{a+b}$.

Со примена на синусна теорема во ΔBCD добиваме дека

$$\frac{\overline{CD}}{\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{\overline{BD}}{\sin\beta}\;\Rightarrow\;\overline{BD}=\frac{\frac{ab}{a+b}\sin\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}\;\Rightarrow\;\overline{BD}=\frac{ab\cos\frac{\beta}{2}}{a+b}.$$

Со примена на косинусна теорема во ΔOBD добиваме дека

$$\overline{OD}^2=\overline{OB}^2+\overline{BD}^2-2\overline{OB}\cdot\overline{OD}\cdot\cos\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right).$$

Оттука следува дека $\overline{OD}^2<\overline{OB}^2$ ако и само ако $\overline{BD}^2<2\overline{OB}\cdot\overline{OD}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$. Значи, точката D е во внатрешноста на кружницата k ако и само ако $\overline{BD}<2\overline{OB}\sin\frac{\beta}{2}$, односно под услов да важи

$$\frac{2ab\cos\frac{\beta}{2}}{a+b}<2\frac{b}{2\sin\beta}\cdot\sin\frac{\beta}{2}.$$

Бидејќи $a=2b\cos\beta$, го трансформираме последново неравенство:

$$\frac{4b^2\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}}{b(2\cos\beta+1)}<\frac{b\sin\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}},\quad\text{па}\quad\frac{4\cos\beta\cos\frac{\beta}{2}}{2\cos\beta+1}<\frac{1}{2\cos\frac{\beta}{2}},\quad\text{од каде}\quad 4\cos\beta\cdot 2\cos^2\frac{\beta}{2}-(2\cos\beta+1)<0.$$

Последново станува $4\cos\beta\cdot(1+\cos\beta)-(2\cos\beta+1)<0$, односно $4\cos^2\beta+2\cos\beta-1<0$.

Јасно $\cos\beta\in\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4},\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$, од каде $\cos\beta<\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Прво ќе покажеме дека $\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Од тоа што,

$$\sin 18^\circ\cos 36^\circ=\frac{2\sin 18^\circ\cos 18^\circ\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ}=\frac{\sin 36^\circ\cos 36^\circ}{2\cos 18^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{\cos 18^\circ}{4\cos 18^\circ}=\frac{1}{4}\quad\text{и}$$

$$\sin 18^\circ-\cos 36^\circ=\cos 72^\circ-\cos 36^\circ=-2\sin\frac{72^\circ+36^\circ}{2}\sin\frac{72^\circ-36^\circ}{2}=-2\sin 54^\circ\sin 18^\circ=-2\sin 18^\circ\cos 36^\circ=-\frac{1}{2},$$

следува дека $\cos 36^\circ=\sin 18^\circ+\frac{1}{2}$. Од $\sin 18^\circ\left(\sin 18^\circ+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ и $\sin 18^\circ>0$, добиваме $\sin 18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Значи, $\cos\beta<\sin 18^\circ=\cos 72^\circ$. Бидејќи $\cos x$ е опаѓачка функција на интервалот $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ и $\beta<\frac{\pi}{2}$, добиваме дека $\beta>72^\circ$.

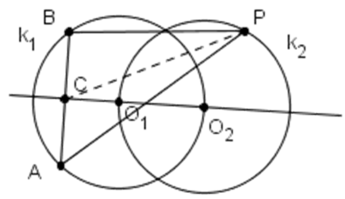
Четврта година

1. Природниот број n го нарекуваме *добар* ако и само ако постојат точно пет природни броеви k_i за кои важи $n+k_i \mid (n-k_i^3)$, $(1 \le i \le 5)$. Докажи дека бројот 29 е *добар* број.

Решение. Нека n е добар број. Бидејќи за секое $x \in \mathbb{N}$ важи $n+x \mid (n^3+x^3)$, следува дека за точно пет природни броеви x важи $n+x \mid (n-x^3)+(n^3+x^3)$, односно $n+x \mid (n+n^3)$. Значи, бројот n е *добар* ако и само ако бројот n^3+n има точно пет делители поголеми од n.

Бидејќи $29^3+29=2\cdot 29\cdot 421$ добиваме дека 29^3+29 има точно пет делители поголеми од 29, тоа се броевите $2\cdot 29, 421, 2\cdot 421, 29\cdot 421, 2\cdot 29\cdot 421$. Заклучуваме дека бројот 29 е *добар број.* Притоа, единствените пет природни броеви k_i за кои важи $29+k_i \mid (29-k_i^3)$ се 29, 392, 813, 12180 и 24389.

2. Растојанието помеѓу центрите на кружниците k_1 и k_2, чии радиуси изнесуваат r, е еднакво на r. На кружницата k_1 избрани се точки A и B кои се симетрични во однос на правата која ги поврзува центрите на кружниците. На кружницата k_2 е избрана произволна точка P која не се совпаѓа со точките A и B. Докажи дека $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2 \ge 2r^2$.



Решение. Нека O_1 и O_2 се центри на кружниците k_1 и k_2, а точката C е средната точка на отсечката AB. Нека $\angle BCP=\phi$. Применувајќи ја косинусната теорема за триаголникот PBC добиваме $\overline{PB}^2=\overline{BC}^2+\overline{PC}^2-2\overline{BC}\cdot\overline{PC}\cdot\cos\phi.$ …(1).

Аналогно, од триаголникот PCA имаме

$$\overline{PA}^2=\overline{AC}^2+\overline{PC}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{PC}\cdot\cos(180^\circ-\phi)=\overline{AC}^2+\overline{PC}^2+2\overline{AC}\cdot\overline{PC}\cdot\cos\phi. \;\ldots(2).$$

Собирајќи ги равенствата (1) и (2) и користејќи дека $\overline{AC}=\overline{BC}$ добиваме $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2\overline{PC}^2+2\overline{AC}^2$ …(3).

Ако точката C се наоѓа лево од O_1, од неравенството на триаголник следува дека $\overline{CO_2}=\overline{CO_1}+r<\overline{PC}+\overline{PO_2}=\overline{PC}+r.$ Оттука пак, следува дека $\overline{CO_1}<\overline{PC}.$

Аналогно, ако точката C се наоѓа помеѓу O_1 и O_2 важи $\overline{CO_1}=r-\overline{CO_2}=\overline{PO_2}-\overline{CO_2}<\overline{PC}.$

Ако во равенството (3) замениме дека $\overline{CO_1}<\overline{PC}$ го добиваме тврдењето на задачата, имено добиваме

$$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2>2\overline{CO_1}^2+2\overline{AC}^2=2\overline{AO_1}^2=2r^2.$$

Во случајот кога точките P и O_1 се совпаѓаат добиваме $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=2r^2$.

3. Позитивните цели броеви ги означуваме со некој од броевите 0, 1 или 2, според следново правило: Ако позитивниот цел број n е означен со $j\in\{0,1,2\}$, тогаш бројот $n+j$ се означува со 0. Нека S го означува збирот на означувањата на првите 2023 позитивни цели броеви. Одреди ја максималната можна вредност на S.

Решение. Нека е дадена произволна шема на означување на броевите, согласно правилото дадено во задачата. Нека k е бројот на елементи од множеството $\{1, 2, ..., 2023\}$ кои се означени со 2, l е бројот на оние кои се означени со 1, а m е бројот на елементи означени со 0. Тогаш ќе имаме $S=2k+l$.

Според условот на задачата, за секој позитивен број $i\in\{1, 2, ..., 2021\}$ означен со 2, бројот $i+2$ е означен со 0. Оттука следи дека бројот на броеви помали од 2021 кои со означени со 2, мора да е помал или еднаков на m. Земајќи ги предвид и преостанатите два броја 2022 и 2023, добиваме дека $k\le m+2$.

Оттука, за сумата S важи: $S=2k+l=k+k+l\le k+(m+2)+l=2023+2=2025$.

Сега, ќе дадеме пример во кој збирот на означувањата е точно 2025. Да го разгледаме следното означување на сите елементи од $\{1, 2, ..., 2023\}$:

$$210\,|\,210\,|\,210\,|\underbrace{2200\,|\,2200\,|\,2200\,|\ldots|\,2200\,}_{503\text{ блока од }2200}|\,22$$

Имаме: $S=4\cdot 503+13=2025$, па бидејќи докажавме дека $S\le 2025$, заклучуваме дека 2025 е најголемата можна вредност на S.

4. Нека f е функција дефинирана на множеството природни броеви на следниот начин:

i. $f(1)=0$,

ii. $f(p)=1$ за секој прост број p,

iii. $f(ab)=af(b)+bf(a)$, за сите природни броеви a и b.

Определи ги сите природни броеви n така што $f(n)=n$.

Решение. Нека n е природен број. Користејќи го правилото (iii), за $n=abc$ добиваме:

$$f(abc)=cf(ab)+abf(\text{c})=c\big(bf(a)+af(b)\big)+abf(\text{c})=cbf(a)+caf(b)+abf(c)\text{, односно}$$

$$f(abc)=\frac{n}{a}f(a)+\frac{n}{b}f(b)+\frac{n}{c}f(\text{c}).$$

Ќе го обопштиме правилото (iii) за произволна факторизација на n, користејќи математичка индукција. По претпоставка, нека ова правило важи за броеви разложени на $k-1$ множители, односно нека важи:

$$f(a_1\dots a_{k-1})=\frac{n}{a_1}f(a_1)+\frac{n}{a_2}f(a_2)+\dots\frac{n}{a_{k-1}}f(a_{k-1}).$$

Нека сега n е разложен на k множители. Со групирање на првите два множители, користејќи ја претпоставката добиваме:

$$f\big((a_1a_2)a_3\dots a_k\big)=\frac{n}{a_1a_2}f(a_1a_2)+\frac{n}{a_3}f(a_3)+\dots\frac{n}{a_k}f(a_k),$$

па бидејќи за $k=2$ формулата очигледно важи, конечно добиваме дека за $n=a_1\dots a_k$ важи

$$f(n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{a_i}f(a_i).$$

Разгледуваме канонична факторизација на n на прости множители, $n=(p_1)^{\alpha_1}\dots(p_k)^{\alpha_k}$. Тогаш, користејќи го (ii), добиваме:

$$f(n)=\sum_{i=1}^{k}\frac{n\cdot\alpha_i}{p_i}f(p_i) = \sum_{i=1}^{k}\frac{n\cdot\alpha_i}{p_i}\cdot 1 = n\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i}.$$

Сега, да претпоставиме дека $f(n)=n$. Од последното равенство добиваме дека $\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i}=1$.

Нека $k>1$. Бидејќи $0<\frac{\alpha_i}{p_i}<1$, добиваме $\alpha_i<p_i$, па заклучуваме дека $p_i \nmid \alpha_i, \forall i$.

Да земеме $\frac{\alpha_1}{p_1}=1-\sum_{i=2}^{k}\frac{\alpha_i}{p_i}=\frac{N}{p_2p_3\cdots p_k}$, за некој цел број N. Тогаш $\alpha_1p_2p_3\dots p_k=Np_1$ е број кој не е делив со p_1, што е очигледна контрадикција. Значи, единствено можно е $k=1$, при што важи $\frac{p}{\alpha}=1$ т.е. $p=\alpha$.

Конечно, заклучуваме дека единствени броеви кои ги задоволуваат условите на задачата се од облик $n=p^p$ за p произволен прост број.