РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ОД ОПШТИНСКИОТ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2023

4.02.2023

Прва година

1А. Еден селанец пошол на пазар и со себе понел n вреќи со компири. На патот од селото до пазарот требало да плати давачки на три капии. На првата капија давачката му била $\frac{1}{4}$ од товарот со кој пристигнал, но стражарот се сожалил на селанецот, па од наплатеното му вратил три вреќи. На втората капија давачката на селанецот била $\frac{1}{3}$ од товарот со кој пристигнал, но и вториот стражар се сожалил на селанецот, па од наплатеното му вратил две вреќи. На последната, трета капија давачката на селанецот била $\frac{1}{2}$ од товарот со кој пристигнал, но и овој стражар се сожалил и од наплатеното на селанецот му вратил една вреќа. Кога стигнал на пазарот селанецот избројал дека му останале точно половина од бројот на вреќи со компири со кои тргнал на пазар. Со колку вреќи компири селанецот тргнал на пазар?

Решение 1. На првата капија селанецот пристигнал со n вреќи. Според условот на задачата давачката му била $\frac{1}{4}$ од товарот со кој пристигнал, што значи дека му останале $\frac{3}{4}$ од товарот, т.е. $\frac{3n}{4}$ вреќи со компири. Бидејќи стражарот му вратил три вреќи, селанецот од првата капија заминал со $\frac{3n}{4}+3$ вреќи. **(5 поени)** На втората капија давачката му била $\frac{1}{3}$ од товарот со кој пристигнал, значи му останале $\frac{2}{3}$ од товарот со кој пристигнал, т.е. $\frac{2}{3}\left(\frac{3n}{4}+3\right)=\frac{2n}{4}+2=\frac{n}{2}+2$. Вториот стражар му вратил две вреќи, па селанецот од втората капија заминал со $\frac{n}{2}+2+2=\frac{n}{2}+4$ вреќи. **(5 поени)** На третата капија давачката му била $\frac{1}{2}$ од товарот со кој пристигнал, па му останала $\frac{1}{2}$ од товарот со кој пристигнал, т.е. $\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}+4\right)=\frac{n}{4}+2$. Но третиот стражар му вратил една вреќа, па селанецот од третата капија заминал со $\frac{n}{4}+2+1=\frac{n}{4}+3$ вреќи. **(5 поени)** На пазарот пристигнал со половина од бројот на вреќи со кој пошол, значи $\frac{n}{2}=\frac{n}{4}+3$ **(5 поени)**, од каде следи дека $n=12$ вреќи компири. **(5 поени)**

Решение 2. Од текстот на задачата имаме дека $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\left(n-\frac{n}{4}+3\right)+2\right)+1=\frac{n}{2}$, **(15 поени)** од каде $\frac{n}{4}+3=\frac{n}{2}$, **(5 поени)** односно селанецот тргнал со $n=12$ вреќи компири. **(5 поени)**

1Б. Во зоолошка градина имало 5 врапчиња со еднакви маси и 6 ластовички со еднакви маси. При мерење на вкупната маса на сите врапчиња и вкупната маса на сите ластовички со помош на вага, се покажало дека масата на сите врапчиња е поголема од масата на сите ластовички. Ако едно врапче си го замени местото со една ластовичка, тогаш вагата ќе биде во рамнотежа. Вкупната маса на врапчињата и ластовичките е 380 грама. Колку изнесува масата на едно врапче, а колку масата на една ластовичка?

Решение. Да ја означиме масата на едно врапче со x, а масата на една ластовичка со y. Тогаш, имаме дека $5x>6y$, но ако едно врапче си го промени местото со една ластовичка, тогаш вагата ќе биде во рамнотежа, односно $4x+y=5y+x$ ... (1). **(5 поени)** Вкупната маса на врапчињата и ластовичките е 380 грама, односно $5x+6y=380$ ... (2). **(5 поени)** Од (1) имаме $3x=4y$ т.е. $y=\frac{3x}{4}$ ... (3). **(5 поени)** Со замена на (3) во (2), добиваме $5x+6\cdot\frac{3x}{4}=380$, од каде $x=40$, а од (1) се добива дека $y=30$. Масата на едно врапче изнесува 40 грама, а на една ластовичка 30 грама. **(10 поени)**

2А. (Сигма 126, Задачи од училницата, Прва година, задача 3) Дадени се множествата $A=\{11k+8\,|\,k\in\mathbb{Z}\}$, $B=\{4m\,|\,m\in\mathbb{Z}\}$ и $C=\{11\cdot(4n+1)-3\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$. Докажи дека $A\cap B=C$.

Решение. Ќе ја докажеме еквиваленцијата $x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in C$. Со тоа ќе биде докажана дадената еднаквост.

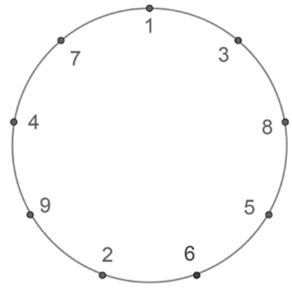
$\Rightarrow$: Нека x е произволен број и нека $x\in A\cap B$. Тогаш $x\in A$ и $x\in B$. Значи, постојат цели броеви k и m, така што $x=11k+8$ и $x=4m$, односно $11k+8=4m$. **(5 поени)** Оттука добиваме дека $11k=4m-8$, односно $11k=4\cdot(m-2)$. Бидејќи 11 и 4 се заемно прости броеви, следува дека $4\,|\,k$, т.е. $k=4t$, за некој $t\in\mathbb{Z}$. **(5 поени)** Тогаш бројот x може да се запише како $x=11k+8=11\cdot 4t+8=11\cdot 4t+11-3=11\cdot(4t+1)-3$. Јасно, со ваков облик $x\in C$. Докажавме дека $x\in A\cap B\Rightarrow x\in C$ .....(1) **(5 поени)**

$\Leftarrow$: Нека $x\in C$. Тогаш постои $n\in\mathbb{Z}$, така што $x=11\cdot(4n+1)-3$. Средуваме до облик $x=11\cdot 4n+8=4\cdot(11n-2)$. **(5 поени)** Ако замениме со $u=4n$, $u\in\mathbb{Z}$ и $v=11n+2$, $v\in\mathbb{Z}$, добиваме дека $x=11\cdot u+8=4\cdot v$. Следува дека $x\in A\cap B$. Докажавме дека $x\in C\Rightarrow x\in A\cap B$ .....(2).

Конечно од (1) и (2) следува дека $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in C$, а оттука $A \cap B = C$. **(5 поени)**

2Б. (Сигма 126, Рубрика задачи, задача 1698) Дали е можно броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 да се запишат на кружница така што збирот на било кои два соседни броја не е делив ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7 ?

Решение. Одговорот е потврден, како што може да се види од цртежот десно. Уште повеќе, $n = 9$ е најмалиот природен број различен од 1, таков што броевите од 1 до n можат да се распоредат на кружница така што збирот на кои било два соседни броја не е делив ниту со ниту со 3, ниту со 5, ниту со 7. Имено, ако $1 < n < 9$ тогаш 2 и 4 може да го имаат за сосед само бројот 6 и 7 соодветно. За лесно да го конструираме добиеното решение, доволно е да забележиме дека на кружницата:



(i) 1 мора да е меѓу 3 и 7, **(5 поени)**
(ii) 2 мора да е меѓу 6 и 9, **(5 поени)**
(iii) 4 мора да е меѓу 7 и 9. **(5 поени)**

Распоредување на останатите броеви е како на цртежот. **(10 поени)**

Напомена: Ако ученикот скицира кружница на која се запишани броеви што го задоволуваат барањето, а не нуди објаснување/решение, тогаш ги добива сите 25 поени.

3АБ. (Сигма 127, Задачи од училницата, Прва година, задача 1)

Нека a и b се цели броеви такви што во развиениот облик на полиномот $(x^2+ax+b)^3$ коефициентот пред x^4 е 99, а коефициентот пред x е 162. Најди ги вредностите на броевите a и b.

Решение 1. Дадениот израз го запишуваме во развиен облик:

$$(x^2+ax+b)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(ax+b) + 3x^2(ax+b)^2 + (ax+b)^3 =$$
$$= x^6 + 3x^4(ax+b) + 3x^2(a^2x^2 + 2axb + b^2) + a^3x^3 + 3a^2x^2b + 3axb^2 + b^3$$
$$= x^6 + 3ax^5 + 3bx^4 + 3a^2x^4 + 6abx^3 + 3b^2x^2 + a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 =$$
$$= x^6 + 3ax^5 + (3b+3a^2)x^4 + (6ab+a^3)x^3 + (3b^2+3a^2b)x^2 + 3ab^2x + b^3. \quad \textbf{(10 поени)}$$

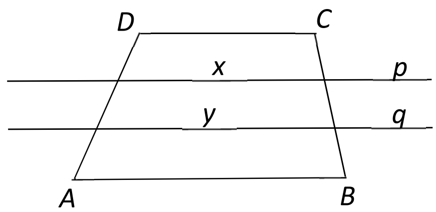
Коефициентот пред x^4 е $3b+3a^2$, а коефициентот пред x е $3ab^2$. Од условите на задачата имаме дека $3b+3a^2=99$ и $3ab^2=162$, односно $b+a^2=33$ и $ab^2=54$. **(5 поени)** Десните страни на двете равенства се деливи со 3, па затоа мора a и b да бидат деливи со 3 (одговори зошто). Сега, за $a=3m$ и $b=3n$, каде што m и n се цели броеви, со замена во равенствата добиваме $3n+9m^2=33$ и $27mn^2=54$, односно $n+3m^2=11$ и $mn^2=2$. Имајќи предвид дека $n^2>0$, од $mn^2=2$ следува дека $m=1$ и $n^2=2$, што не е можно (n е цел број), или $m=2$ и $n^2=1$. Оттука $n=-1$ или $n=1$. Но, равенството $n+3m^2=11$ го задоволува само бројот $n=-1$. Следува дека бараните броеви се $a=3\cdot 2=6$ и $b=3\cdot(-1)=-3$. **(10 поени)**

Решение 2. Дадениот израз го запишуваме во развиен облик:

$$(x^2+ax+b)^3 = (x^2)^3 + 3(x^2)^2(ax+b) + 3x^2(ax+b)^2 + (ax+b)^3 =$$
$$= x^6 + 3x^4(ax+b) + 3x^2(a^2x^2 + 2axb + b^2) + a^3x^3 + 3a^2x^2b + 3axb^2 + b^3$$
$$= x^6 + 3ax^5 + 3bx^4 + 3a^2x^4 + 6abx^3 + 3b^2x^2 + a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3 =$$
$$= x^6 + 3ax^5 + (3b+3a^2)x^4 + (6ab+a^3)x^3 + (3b^2+3a^2b)x^2 + 3ab^2x + b^3. \quad \textbf{(10 поени)}$$

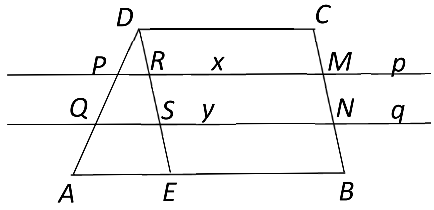
Коефициентот пред x^4 е $3b+3a^2$, а коефициентот пред x е $3ab^2$. Од условите на задачата имаме дека $3b+3a^2=99$ и $3ab^2=162$, односно $b+a^2=33$ ...(1) и $ab^2=54$ ... (2). **(5 поени)** Бидејќи $54=2\cdot 3^3$, од (2) заклучуваме дека $b^2=1$ или $b^2=9$. Ако $b^2=1$, тогаш $a=54$, и со замена во (1) добиваме дека $b=33-54^2=-2883$, што не е можно, затоа што $b^2=1$. Значи, $b^2=9$, па од (2) следи дека $a=6$. Со замена во (1) добиваме дека $b=33-6^2=-3$, што е во ред, затоа што $b^2=9$. Значи, $a=6$ и $b=-3$. **(10 поени)**

4АБ. Правите p и q се паралелни со основите на трапезот $ABCD$ и го делат кракот AD на три еднакви дела. Најди ги должините на отсечките x и y кои крацитe ги отсекуваат од правите p и q соодветно, ако $\overline{AB}=13$ и $\overline{CD}=4$.



Решение. Нека пресечните точки на правите p и q со кракот AD се P и Q соодветно. Тогаш, $\overline{DP}=\overline{PQ}=\overline{QA}=a$. Низ темето D повлекуваме права паралелна со кракот BC која основата AB ја сече во точката E. Нека пресечните точки на на правите p и q со отсечката DE се R и S соодветно. Четириаголникот $EBCD$ е паралелограм (од $EB \parallel CD$ и $BC \parallel ED$), од каде $\overline{EB}=\overline{CD}=4$ и

$\overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB} = 13 - 4 = 9$. Но, исто така и $\overline{RM} = \overline{SN} = 4$, каде M и N се пресечните точки на правите p и q со кракот BC соодветно. **(5 поени)** Од сличноста $\Delta AED \sim \Delta QSD$ имаме $\overline{AE} : \overline{QS} = \overline{AD} : \overline{QD}$, односно $9 : \overline{QS} = (3a) : (2a)$, од каде $\overline{QS} = \frac{9 \cdot 2a}{3a} = 6$, па $y = \overline{QS} + \overline{SN} = 6 + 4 = 10$. **(10 поени)** Од сличноста на $\Delta AED \sim \Delta PRD$ имаме $\overline{AE} : \overline{PR} = \overline{AD} : \overline{PD}$, односно $9 : \overline{PR} = (3a) : a$, од каде $\overline{PR} = \frac{9a}{3a} = 3$, па $x = \overline{PR} + \overline{RM} = 3 + 4 = 7$. **(10 поени)**



Втора година

1А.2Б. (**Сигма 126, задача 3, Задачи од училница**) Ако x и y се реални решенија на системот $\begin{cases} x + \frac{x}{y} + y = 8 \\ x \cdot \frac{x+y}{y} = 15 \end{cases}$, најди ја најмалата вредност на збирот $x + y$.

Решение. Ќе ставиме смена $x + y = u$ и $\frac{x}{y} = v$ **(7)** и добиваме еквивалентен систем на дадениот, $\begin{cases} u + v = 8 \\ u \cdot v = 15 \end{cases}$. Последниот систем ќе го решиме со помош на метод на замена, ставајќи $v = 8 - u$ **(3)**. Добиваме $u(8-u) = 15 \Leftrightarrow u^2 - 8u + 15 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 3, u_2 = 5$ **(10)**. Јасно е дека најмалата вредност на збирот е $x + y = u = 3$ **(5)**.

1Б. Нека a, b, c, d и e се последователни природни броеви такви што $a < b < c < d < e$. Ако $a^2 + b^2 + c^2 = d^2 + e^2$, која е вредноста на a?

Решение. Бидејќи броевите се последователни ќе ги означиме со $n-1, n, n+1, n+2$ и $n+3$ **(5)**. Добиваме равенство $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2 + (n+3)^2$ кое е еквивалентно со $3n^2 + 2 = 2n^2 + 10n + 13$, т.е. со $n^2 - 10n - 11 = 0$ **(10)**. Решенија на последната равенка се 11 и -1, па според условите на задачата следува $n = 11$ **(7)**. Тогаш $a = 11 - 1 = 10$ **(3)**.

2А. (**Сигма 125, Рубрика задачи**) Реши ја параметарската квадратна равенка $(a^2 - b^2)x^2 + ab = (a^2 + b^2)x$ со параметри a и b.

Решение. Равенката $(a^2 - b^2)x^2 + ab = (a^2 + b^2)x$ е еквивалентна со $(a^2 - b^2)x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$ чии решенија ќе ги најдеме со формулата за наоѓање на корените на квадратна равенка

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 + b^2)^2 - 4ab(a^2 - b^2)}}{2(a^2 - b^2)} \qquad \textbf{(5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^3b + 4ab^3}}{2(a^2 - b^2)}$$

$$x_{1,2} = \frac{a^2 + b^2 \pm \sqrt{(a^2 - 2ab - b^2)^2}}{2(a^2 - b^2)} \qquad \textbf{(5)}$$

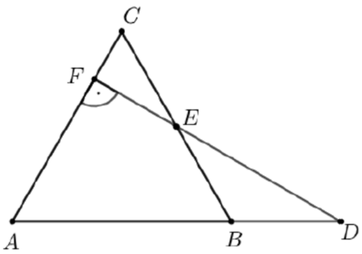
$$x_1 = \frac{a^2 + b^2 + a^2 - 2ab - b^2}{2(a^2 - b^2)} = \frac{2a^2 - 2ab}{2(a^2 - b^2)} = \frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \frac{a}{a+b} \text{ при услов } a \neq \pm b;$$

$$x_2 = \frac{a^2 + b^2 - a^2 + 2ab + b^2}{2(a^2 - b^2)} = \frac{2b^2 + 2ab}{2(a^2 - b^2)} = \frac{b(b+a)}{(a-b)(a+b)} = \frac{b}{a-b} \text{ при услов } a \neq \pm b \ \textbf{(5)}.$$

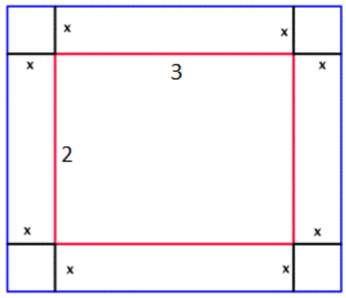
Ако $a = \pm b$ тогаш равенката нема да е квадратна и ќе има решение $x = \frac{\pm b^2}{2b^2} = \pm\frac{1}{2}$ кога $b \neq 0$ **(5)**. Ако $a = b = 0$, равенката има бесконечно многу решенија **(5)**.

3А. Даден е рамностран триаголник ABC и точка D на правата AB таква што $\overline{AB} = 2\overline{BD}$. Притоа, нормалата спуштена од точката D кон AC ја сече страната BC во точка E и страната AC во точка F. Ако $\overline{CF} = 6$, колку изнесуваплоштината на четириаголникот $ABEF$?

Решение. Бидејќи триаголникот ECF е правоаголен со остри агли од $30°$ и $60°$, следува дека $\overline{CE}=2\overline{CF}=12$ и тогаш $\overline{FE}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$ **(8)**. Нека страната на рамностраниот триаголник е a. Од правоаголниот триаголник ADF со остри агли од $30°$ и $60°$ следува дека $2\overline{FA}=\overline{AD}$, т.е. $2(a-6)=a+\frac{a}{2}$ и оттука добиваме $a=24$ **(10)**. За плоштината на четириаголникот $ABEF$ имаме $P_{ABC}-P_{ECF}=\frac{24^2\sqrt{3}}{4}-\frac{6\cdot 6\sqrt{3}}{2}=6\cdot 21\sqrt{3}=126\sqrt{3}$ **(7)**.



3Б. (Сигма 123, задача 4, Задачи од училница) Бобан направил јорган со димензии $2\,\mathrm{m}$ и $3\,\mathrm{m}$. Тој има уште $6\,\mathrm{m}^2$ материјал кој што може да го искористи за да додаде раб околу јорганот. Колку широк треба да го направи работ за да го искористи целиот материјал? (Работ мора да биде со иста ширина на сите четири страни.).



Решение. Ако нацртаме скица на јорганот, во облик на правоаголник, проблемот се сведува на одредување на плоштина на правоаголник. Така, на цртежот десно, внатрешниот правоаголник е јорганот, а на него е доцртан работ кој Бобан сака да го додаде околу јорганот **(5)**. За да се искористи целиот материјал за работ, потребно е плоштината на работ со ширина x да изнесува $6\,\mathrm{m}^2$ (толку материјал преостанало) **(5)**. Таа плоштина може да се пресмета како разлика на плоштината на големиот правоаголник со страни $(2+2x)$ и $(3+2x)$ и плоштината на внатрешниот правоаголник со страни 2 и 3 **(5)**. Добиваме равенка: $(2+2x)\cdot(3+2x)-2\cdot 3=6 \Leftrightarrow 4x^2+10x-6=0$ **(5)**. Решенијата на квадратната равенка се $x_1=\frac{1}{2}$ и $x_2=-3$. Второто решение не се зема предвид бидејќи е негативен број, па останува ширината на работ околу јорганот да е $x=0{,}5\,\mathrm{m}$ **(5)**.

4АБ. Ева и Сара заедно имаат 51 година. Марко и Сара заедно имаат 54 години. Ако збирот на цифрите на годините на Сара е за 1 поголем од годините на Ева, колку години има Марко?
Решение. Нека годините на Ева се x, годините на Сара се y и годините на Марко се z. Тогаш, $x+y=51$, $z+y=54$ **(3)**, па јасно, Сара има или едноцифрен или двоцифрен број на години. Нека $y=10a+b$, каде $a,b=0,1,\dots,9$ **(3)**. Од условот на задачата тогаш $a+b=1+x$ **(3)**. Заменувајќи во првата равенка, добиваме $a+b-1+10a+b=51$, т.е. $11a+2b=52$ **(4)**. Од последната равенка следува дека a е парен број, т.е. парна цифра па $a=0,2,4,6,8$ **(4)**. Со проверка, добиваме дека $a=4$, а оттука $b=4$ **(5)**. Значи, Сара има 44 години, а тогаш Марко има 10 години **(3)**.

Трета година

1А. (Сигма 122, Задачи од училницата, Трета година, Задача 2) Нека m и n се природни броеви за кои важи равенството $\log_3\left(\log_{2^m}\left(\log_{3^n}3^{100}\right)\right)=0$. Докажи дека бројот n е содржател на бројот 5.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката $\log_{2^m}\left(\log_{3^n}3^{100}\right)=1$, **(5п.)** односно $3^{n\cdot 2^m}=3^{100}$ **(10п.)**. Оттука $n\cdot 2^m=100$, од каде $m=1$ и $n=50$ **(5п.)** или $m=2$ и $n=25$. **(5п.)** Во двата случаи n е содржател на бројот 5.

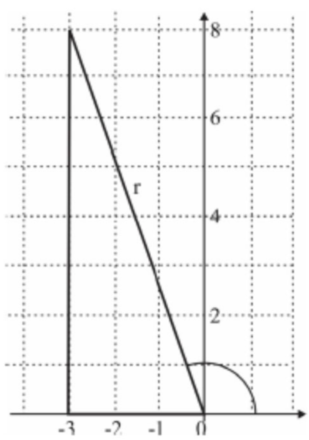
1Б. (Сигма 122, Задачи од училницата, Трета година, Задача 4)

Пресметај ја вредноста на $\cos\theta$ ако се знае дека $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ и $\operatorname{tg}\theta=-\frac{8}{3}$.

Решение. Косинусот е парна функција, а за агол $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ истиот е негативен. **(5п.)**

Сега, според условите на задачата, конструираме триаголник како на цртежот. **(10п.)**

Хипотенузата на триаголникот е $r=\sqrt{8^2+(-3)^2}=\sqrt{73}.$ **(5п.)** Тогаш $\cos\theta=\frac{-3}{\sqrt{73}}=\frac{-3\sqrt{73}}{73}$. **(5п.)**



2А. Пресметај ја вредноста на изразот $\left(1+\operatorname{tg}1^\circ\right)\left(1+\operatorname{tg}2^\circ\right)\dots\left(1+\operatorname{tg}44^\circ\right)\left(1+\operatorname{tg}45^\circ\right)$.

Решение. Ако $\alpha+\beta=45^\circ$, тогаш од идентитетот $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ добиваме $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta=1$. **(10п.)**

Следува $\left(1+\operatorname{tg}k^\circ\right)\left(1+\operatorname{tg}\left(45^\circ-k^\circ\right)\right)=1+\operatorname{tg}k^\circ+\operatorname{tg}\left(45^\circ-k^\circ\right)+\operatorname{tg}k^\circ\cdot\operatorname{tg}\left(45^\circ-k^\circ\right)=2$, за секој $k=1,2,...,22$. **(10п.)**

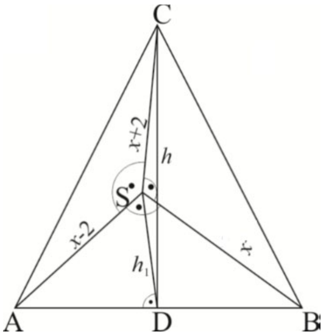
Бидејќи $1+\operatorname{tg}45^\circ=2$, добиваме дека $\left(1+\operatorname{tg}1^\circ\right)\left(1+\operatorname{tg}2^\circ\right)...\left(1+\operatorname{tg}44^\circ\right)\left(1+\operatorname{tg}45^\circ\right)=2^{23}$. **(5п.)**

2Б. Реши ја равенката $8^{\frac{2}{x}}-8\cdot2^{\frac{3}{x}}+12=0$.

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $2^{3\cdot\frac{2}{x}}-8\cdot2^{\frac{3}{x}}+12=0$. **(10п.)** Воведуваме смена $t=2^{\frac{3}{x}}$, па последната равенка преминува во квадратна равенка од облик $t^2-8t+12=0$. **(5п.)** Решенијата на квадратната равенка се $t_1=2$ и $t_2=6$. **(5п.)** Според тоа, за $t_1=2$ добиваме дека $x_1=3$, а за $t_2=6$ добиваме дека $x_2=3\log_6 2$. Значи, решенија на дадената равенка се $x_1=3$ и $x_2=3\log_6 2$. **(5п.)**

3АБ. (Сигма 121, **Задачи од училницата, Трета година, Задача 3)**

За тристрана пирамида $ABCS$, плоштината на основата ABC изнесува $14\,\mathrm{cm}^2$. Бочните рабови на пирамидата се два по два заемно нормални, а нивните должините се три последователни парни броеви. Пресметај ги плоштината и волуменот на пирамидата.



Решение. Должините на бочните рабови ќе ги означиме со $\overline{AS}=x-2, \overline{BS}=x, \overline{CS}=x+2,$ за *x* парен број. Секој од бочните ѕидови на пирамидата е правоаголен триаголник. Да ги означиме уште и должината на основниот раб $\overline{AB}=c$, h_1 висината во ΔABS спуштена кон хипотенузата и h висината во ΔABC спуштена кон *AB*. Плоштината на пирамидата може да се запише како $P=P_{\Delta ABC}+P_{\Delta ACS}+P_{\Delta ABS}+P_{\Delta BCS}$. Односно добиваме

$P=14+\dfrac{1}{2}\left[(x-2)(x+2)+x(x-2)+x(x+2)\right].$ **(5п.)**

За обвивката на пирамидата добиваме бочна плоштина $M=\dfrac{1}{2}(3x^2-4)=\dfrac{3}{2}x^2-2.$ **(3п.)**

За плоштината на ΔABS може да запишеме $x(x-2)=ch_1$, каде $c=\sqrt{x^2+(x-2)^2}=\sqrt{2x^2-4x+4}.$ **(3п.)** Оттука, со замена во претходното равенство добиваме $h_1=\dfrac{x(x-2)}{\sqrt{2x^2-4x+4}}$. **(3п.)** Од ΔDCS имаме $h=\sqrt{(x+2)^2+h_1^{\,2}}$. **(3п.)** За плоштината на основата сега може да запишеме $28=ch,$ па со замена на погоре добиените вредности, последново добива облик на равенка $28^2=(x+2)^2(x^2+(x-2)^2)+x^2(x-2)^2=...=3x^4+16$, од каде $x=4.$ **(5)**

Конечно, за плоштината на пирамидата добиваме $P=36$ квадратни единици, а за волуменот, заради трите прави агли при врвот, $V=\dfrac{x(x-2)(x+2)}{6}=8$ кубни единици. **(3п.)**

4АБ. Определи ги сите парови реални броеви (k,m) за кои $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ е квадратна функција од облик $f(x)=\left(k^2+m^2\right)x^2+kmx+m$ и важи $f(m)=k$ и $f(k)=m$.

Решение. Јасно $k^2+m^2\neq0$, односно $k\neq$ или $m\neq0$. Од условите на задачата го добиваме следниот систем равенки

$$\begin{cases}f(m)=k\\ f(k)=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k\\ \left(k^2+m^2\right)k^2+k^2m+m=m\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k\\ \left(k^2+m^2\right)k^2+k^2m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k\\ k^2\left(k^2+m^2+m\right)=0\end{cases}$$

Од втората равенка да системот $k^2\left(k^2+m^2+m\right)=0$ имаме дека $k=0$ или $k^2+m^2+m=0$. **(5п.)** Ќе ги разгледаме двата случаи:

1. За $k=0$ првата равенка на системот $\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k$ преминува во облик $m^4+m=0$, односно $m\left(m^3+1\right)=0$. Според тоа, $m=0$ или $m=-1$. Бидејќи f е квадратна функција, $k^2+m^2\neq0$, односно $k\neq0$ или $m\neq0.$ Единствени броеви кои ги задоволуваат условите на задачата во овој случај се $k=0$ и $m=-1$. **(5п.)**

2. За $k^2+m^2+m=0$, односно за $k^2+m^2=-m$ првата равенка на системот $\left(k^2+m^2\right)m^2+km^2+m=k$ преминува во облик $-m^3+km^2=k-m$. Тогаш $m^2\left(k-m\right)=k-m$, односно $\left(k-m\right)\left(m^2-1\right)=0$.

Според тоа имаме две можности $k=m$ или $m^2=1$. **(5п.)**

2.1. Ако $k=m$, тогаш од $k^2+m^2=-m$ имаме дека $2m^2+m=0$, односно $m=0$ или $m=-\frac{1}{2}$. Јасно, во овој случај единствени броеви кои ги исполнуваат условите на задачата се $k=m=-\frac{1}{2}$. **(5п.)**

2.2. Ако $m^2=1$, тогаш $m=1$ или $m=-1$. За $m=1$, од $k^2+m^2=-m$ добиваме дека $k^2+1=-1$ и оваа равенка нема решение во множеството реални броеви. За $m=-1$, од $k^2+m^2=-m$ добиваме дека $k^2+1=1$, односно $k=0$. Значи, во овој случај $k=0$ и $m=-1$ се броевите кои ги задоволуваат условите на задачата. **(5п.)**

Јасно, паровите $\left(0,-1\right)$ и $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ се единствените за кои функцијата f ги задоволува условите на задачата.

Четврта година

1А.Одреди ги сите парови од цели броеви (m,n) такви што $4\cdot 3^{2m}+5=n^2$.

Решение 1. Да воочиме дека од $4\cdot 3^{2m}=n^2-5$ следува дека $4\cdot 3^{2m}$ е цел број, што значи дека $m\geq 0$. **(3п.)**
Даденото равенство го запишуваме во следниот облик: $n^2-4\cdot 3^{2m}=5$, односно $(n-2\cdot 3^m)(n+2\cdot 3^m)=5$, **(10п.)**
каде изразите во заградите се цели броеви. Бидејќи $n-2\cdot 3^m<n+2\cdot 3^m$, последното равенство е точно само во следните два случаи: $\begin{cases} n-2\cdot 3^m=1 \\ n+2\cdot 3^m=5 \end{cases}$ **(5п.)** и $\begin{cases} n-2\cdot 3^m=-5 \\ n+2\cdot 3^m=-1 \end{cases}$ **(5п.)**

Лесно се добива дека решение на првиот систем е $n=3, m=0$, **(1п.)** а на вториот $n=-3, m=0$. **(1п.)**
Конечно, решение на задачата се паровите $(0,-3)$ и $(0,3)$.

Решение 2. Најпрво, да воочиме дека од $4\cdot 3^{2m}=n^2-5$ следува дека $4\cdot 3^{2m}$ е цел број, што значи дека $m\geq 0$. **(3п.)**
За $m=0$ добиваме $n^2=4\cdot 3^{2\cdot 0}+5=9$, од каде следи дека $n=-3$ или $n=3$. Во овој случај добиваме два пара, $(0,-3)$ и $(0,3)$. **(2п.)** За $m\geq 1$, бројот $n^2=4\cdot 3^{2m}+5$ при делење со 3 дава остаток 2. **(10п.)** Но ова не е можно бидејќи при делење со 3, квадратот на произволен цел број n дава остаток 0 (ако n е делив со 3) или 1 (ако n не е делив со 3). Оттука, за $m\geq 1$ задачата нема решение. **(10п.)** Решение на задачата се паровите $(0,-3)$ и $(0,3)$.

1Б. Најди ја најголемата вредност на природниот број n за кој што $25!+26!$ е делив со 3^n.

Решение. Важи $25!+26!=25!(1+26)=3^3\cdot 25!$. **(5п.)** Разгледувајќи ја каноничната факторизација на бројот $25!$ лесно се заклучува дека $25!=3^{10}\cdot k$, каде k е природен број кој не е делив со 3. **(15п.)**. Оттука следува $25!+26!=3^{13}\cdot k$, што значи $n=13$. **(5п.)**

2А. (Сигма 115, Задачи од училницата) Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи $f(1)=1$ и $f(x+y)=3y\cdot f(x)+2x\cdot f(y)$, за било кои реални броеви x и y.
Решение. Ако во даденото равенство ставиме $x=y=0$, добиваме $f(0)=0$. **(8п.)** Ако пак замениме $x=1, y=0$, добиваме $f(1)=2\cdot f(0)=2\cdot 0=0$. **(12п.)** Бидејќи f е функција, не е можно истовремено да важи $f(1)=0$ и $f(1)=1$. Оттука е јасно дека функција со бараните својства не постои. **(5п.)**

2Б. (Сигма 125, Задачи од училницата) Познато е дека за некои вредности на променливите x и y важи $x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8\leq 0$. Докажи дека $x\geq -\frac{1}{6}$.

Решение. Бидејќи важи $x^4y^2+x^2+2x^3y+6x^2y+8=x^4y^2+\left(2x^3+6x^2\right)y+x^2+8\leq 0$, изразот може да го разгледуваме како квадратен трином по променлива y кој не е позитивен. **(10п.)** За $x\neq 0$, имаме дека $x^4>0$, па параболата е отворена нагоре и ја сече x-оската. Тогаш $D=\left(2x^3+6x^2\right)^2-4x^4\left(x^2+8\right)\geq 0$, **(10п.)** од каде следува дека $24x^5+4x^4\geq 0$ **(3п.)**. Значи $4x^4\left(6x+1\right)\geq 0$, па јасно е дека мора $x\geq -\frac{1}{6}$. **(2п.)**

3А. (Сигма 126, Рубрика Задачи, 1703). Ако за аглите во триаголникот ABC важи $\frac{\sin^2\gamma+\sin^2\beta-\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\sqrt{3}$, тогаш одреди ја вредноста на аголот α.

Решение. Даденото равенство се запишува во обликот $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}-\frac{\sin^2\alpha}{\sin\beta\cdot\sin\gamma}=\sqrt{3}$, односно $\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}-\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}=\sqrt{3}$. **(5п.)** Со користење на синусната теорема последното равенство се трансформира во обликот $\frac{c}{b}+\frac{b}{c}-\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}=\sqrt{3}$ **(10п.)** кое е еквивалентно со равенството $c^2+b^2-a^2=\sqrt{3}bc$. На тој начин добиваме $a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$ ...(1). **(2п.)** Од косинусната теорема го имаме равенството $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$ ...(2), **(3п.),** па од (1) и (2) следува дека $2\cos\alpha=\sqrt{3}$, односно $\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Од последното равенство добиваме дека $\alpha=30^\circ$. **(5п.)**

3Б. (Сигма 119, задача 1603 од Рубрика задачи) Некои членови на аритметичките прогресии $a_n=4n+13$ и $b_n=5n+11$, за $n\in\mathbb{N}$, се еднакви. Докажи дека збирот на првите p еднакви членови е еднаков на $p(10p+11)$.

Решение. Од условот $a_n=b_m$ добиваме $4n+13=5m+11$, т.е. $n=\frac{5m-2}{4}=m+\frac{m-2}{4}$. **(5п.)** Бидејќи n е природен број, следува дека $k=\frac{m-2}{4}\in\mathbb{N}$. **(3п.)** Оттука $m=4k+2$ **(2п.),** па општиот член на заедничкиот дел од низите е $x_k=5m+11=5(4k+2)+11=20k+21,\quad k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. **(4п.)** Притоа, $x_{k+1}-x_k=20$. **(1п.)** Значи, (x_k) е аритметичка прогресија со прв член 21 и разлика 20. Првите p членови се добиваат за $k=0,1,2,...,p-1$. **(3п.)** За бараниот збир добиваме $S_p=\frac{p}{2}(42+(p-1)\cdot 20)=\frac{p}{2}(20p+22)=p(10p+11)$. **(7п.)**

4АБ. На еден математички натпревар на кој учествувале n ученици, дадени се вкупно 4 тешки и 8 лесни задачи. Секој од учениците точно решил 11 од задачите. Притоа, за секој пар од тешка и лесна задача, одреден е бројот на ученици кои точно ги решиле и двете задачи и утврдено е дека збирот на овие 32 броеви е 256. Колку ученици учествувале на натпреварот?

Решение. Од условот на задачата, секој ученик на натпреварот не решил точно една тешка или една лесна задача.
Нека l е бројот на ученици кои не решиле лесна задача, а t е бројот на ученици кои не решиле тешка задача. Тогаш, на натпреварот имало вкупно $n=l+t$ ученици. **(5п.)**
Притоа:

- Секој ученик кој не решил лесна задача, решил 4 тешки и 7 лесни задачи, односно решил $4\cdot 7=28$ парови од лесна и тешка задача. **(5п.)**
- Секој ученик кој не решил тешка задача, решил 3 тешки и 8 лесни задачи, односно решил $3\cdot 8=24$ парови од лесна и тешка задача. **(5п.)**

Според условите на задачата, имаме дека: $28\cdot l+24\cdot t=256$, односно $7\cdot l+6\cdot t=64$. **(5п.)**
Поради тоа што l и t се природни броеви, од последното равенство заклучуваме дека l е парен број.
Натаму, од $t=\frac{64-7\cdot l}{6}$ може да заклучиме дека $l\leq 9$. Со директна проверка за броевите $l=2,4,6,8$ заклучуваме дека целобројна вредност за t се добива само за $l=4$, при што $t=6$. Оттука добиваме дека на натпреварот имало $n=4+6=10$ ученици. **(5п.)**