СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Четврти Меморијален Математички Натпревар

Александар Блажевски - Цане

Категорија: ЈУНИОРИ

Решенија и распределба на поени

Задача 1. Низ дадена точка O во рамнината се повлечени n прави. Одредете ја најголемата можна вредност k (зависно од n) за која секогаш можеме некои k од тие n прави да обоиме црвено без притоа да формираме пар заемно нормални црвени прави.

Решение. Ќе докажеме дека одговорот е: $k = \frac{n}{2}$ ако n е парен и $k = \frac{n+1}{2}$ ако n е непарен. Да разгледаме *најголемо* можно подмножество A од тие n прави така што никои две прави од A не се заемно нормални **(1п)**. Нека A се состои од точно a прави, т.е. $|A| = a$. Со $\bar{A}$ го означуваме множеството од преостанатите $n-a$ прави. Да забележиме дека секоја права од $\bar{A}$ е нормална на некоја права од A. Имено, во спротивно би можеле да префрлиме од $\bar{A}$ во A некоја права што не го исполнува споменатиот услов - со тоа би добиле поголемо подмножество прави од кои никои две не се заемно нормални, што противречи на претпоставената максималност на A. За секоја права $\ell \in A$, најмногу една права од $\bar{A}$ е нормална на ℓ. Следствено, $n - a \leq a$. Еквивалентно, $a \geq \frac{n}{2}$. Да забележиме дека ако ги обоиме во црвено токму правите од A добиваме едно посакувано боење. Значи, бидејќи a е природен број, секогаш можеме да обоиме $k = \frac{n}{2}$ прави на посакуваниот начин кога n е парен и $k = \frac{n+1}{2}$ кога n е непарен **(2п)**.

Останува да докажеме дека постои конфигурација од n прави низ точката O која не дозволува да се обојат во црвено повеќе од $\frac{n}{2}$ прави за парно n односно $\frac{n+1}{2}$ прави за непарно n. Без губење на општоста, да претпоставиме дека O е координатниот почеток на рамнината. За $n = 2m$, избираме m различни прави низ O такви што секоја има позитивен коефициент на правец, и кон нив придодаваме уште m прави низ O секоја од кои е нормална на една од првите m прави. Вторите m прави имаат различни негативни коефициенти на правец, што значи дека имаме вкупно n различни прави кои можеме да ги поделиме во m парови од заемно нормални прави. Да разгледуваме произволно посакувано боење. Во секој пар може да постои најмногу една црвена права, и оттука $k \leq m = \frac{n}{2}$ **(2п)**. Ако $n = 2m + 1$, ја користиме претходната конструкција со m прави со позитивни коефициенти на правец и m прави нормални на нив. Ја додаваме правата $x = 0$. Така имаме m парови кои можат да содржат најмногу една црвена права и уште ја имаме правата $x = 0$. Затоа, за непарно n, не постојат повеќе од $m + 1 = \frac{n+1}{2}$ црвени прави така што никои две не се заеамно нормални **(2п)**. $\square$

Задача 2. Нека a, b, c, d се цели броеви. Докажете дека за секој позитивен цел број n, постојат барем $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ позитивни цели броеви $m \leq n$ такви што $m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$ не е полн квадрат. (За секој реален број x, со $\lfloor x \rfloor$ се означува најголемиот цел број $\leq x$.)

Решение. Нека $P(m) = m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$. Прво да претпоставиме дека $m \equiv 0 \pmod 4$. Тогаш $P(m) \equiv a \pmod 4$. **(1п)** Затоа, ако за такво m, $P(m)$ е полн квадрат, мора да важи или $a \equiv 0 \pmod 4$ или $a \equiv 1 \pmod 4$. **(1п)**

Да претпоставиме сега дека $m \equiv 2 \pmod 4$. Тогаш $P(m) \equiv m + a \equiv 2 + a \pmod 4$. **(1п)** Затоа, ако за такво m, $P(m)$ е полн квадрат, тогаш мора да важи или $a + 2 \equiv 0 \pmod 4$ или $a + 2 \equiv 1 \pmod 4$, односно, или $a \equiv 2 \pmod 4$ или $a \equiv 3 \pmod 4$. **(1п)**

Оттука, ако $a \equiv 2 \pmod 4$ или $a \equiv 3 \pmod 4$, тогаш $P(m)$ не е полн квадрат ни за едно m такво што $m \equiv 0 \pmod 4$. **(1п)** Од друга страна, ако $a \equiv 0 \pmod 4$ или $a \equiv 1 \pmod 4$, тогаш $P(m)$ не е полн квадрат ниту за едно m такво што $m \equiv 2 \pmod 4$. **(1п)** Сега е јасно дека за секој природен број n, имаме барем $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ природни броеви $m \leq n$ такви што $P(m)$ не е полн квадрат. **(1п)** $\square$

Задача 3. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за сите $x, y > 0$ важи

$$f(xy + f(x)) = yf(x) + x.$$

Решение. Ќе дадеме три начини на решавање.

Прв начин. Да докажеме прво дека f е инјективна. Претпоставувајќи го спротивното, постојат $0 < p < q$ така што $f(p) = f(q) = r$. Земаме $x = p$ и $y = \frac{1}{p}$ и добиваме

$$f(1 + f(p)) = \frac{f(p)}{p} + p.$$

Слично, земајќи $x = q$ и $y = \frac{1}{q}$, добиваме

$$f(1 + f(q)) = \frac{f(q)}{q} + q.$$

Оттука

$$p + \frac{f(p)}{p} = f(1 + f(p)) = f(1 + f(q)) = q + \frac{f(q)}{q}.$$

Со други зборови, имаме $p^2q + qr = pq^2 + pr$. Ова е еквивалентно со $pq(p - q) + (q - p)r = 0$ односно со $(q - p)(r - pq) = 0$. Бидејќи претпоставивме дека $q > p$, следува $pq = r$. **(1п)** Но земајќи $x = p$ добиваме дека: $f(py + pq) = pqy + p$ за секое $y > 0$. Слично, $x = q$ ни дава дека: $f(qy + pq) = pqy + q$ за секое $y > 0$. Значи $f(2pq) = pq^2 + p$ и $f(2pq) = p^2q + q$, па така

$$pq^2 + p = p^2q + q \implies (pq-1)(q-p) = 0 \implies pq = 1.$$

Но, тогаш би важело $f(py+1) = y + p$ и $f(qy+1) = y + q$ за секое $y > 0$. Следствено,

$$\frac{q}{p} + p = f(q+1) = 1 + q \implies \frac{1}{p} + p^2 = 1 + p \iff p^3 - p^2 - p + 1 = 0$$
$$\iff (p^2-1)(p-1) = 0 \iff p = 1.$$

Од $pq = 1$ добиваме $q = p = 1$. Оваа противречност докажува дека f е инјективна. **(1п)**

Сега да земеме $x = \frac{1}{2}$ и $y = \frac{1}{2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)}$. Тогаш за $t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)} + f\left(\frac{1}{2}\right)$ имаме

$$f(t) = \frac{1}{2 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Фиксираме произволно $a > 1$. Ако земеме $x = t$ и $y = \frac{a-1}{t} > 0$ добиваме

$$f\left(t \cdot \frac{a-1}{t} + f(t)\right) = \frac{a-1}{t} \cdot f(t) + t \iff f(a) = \frac{1}{t} \cdot a + t - \frac{1}{t}.$$

Со тоа имаме формула за $f(a)$ кога $a > 1$. **(2п)** Земајќи $x = y = 2 > 1$ и применувајќи ја горенаведената формула го добиваме следново:

$$f(4 + f(2)) = 2f(2) + 2 \iff f(4 + \frac{2}{t} + t - \frac{1}{t}) = 2 \cdot \left(\frac{2}{t} + t - \frac{1}{t}\right) + 2$$
$$\iff f\left(4 + t + \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t} + 2t + 2 \iff \frac{1}{t} \cdot \left(4 + t + \frac{1}{t}\right) + t - \frac{1}{t} = \frac{2}{t} + 2t + 2$$
$$\iff \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} = t + 1 \iff t^3 + t^2 - t - 1 = 0 \iff (t^2-1)(t+1) = 0 \iff t = 1.$$

Ако користиме $t = 1$ во формулата за $f(a)$ кога $a > 1$, добиваме дека $f(a) = a$ за секој $a > 1$. Исто така имаме $f(1) = f(t) = 1$. **(1п)**

Нека $a < 1$. Земаме $x = a$ и $y = \frac{1}{f(a)}$, и добиваме

$$f\left(\frac{a}{f(a)} + f(a)\right) = \frac{1}{f(a)} \cdot f(a) + a = a + 1.$$

Заради $a + 1 > 1$ имаме $f(a+1) = a + 1$. Но f е инјективна, што значи дека $\frac{a}{f(a)} + f(a) = a + 1$. Еквивалентно,

$$a + f(a)^2 = (a+1)f(a) \iff f(a)^2 - (a+1)f(a) + a = 0 \iff (f(a)-1)(f(a)-a) = 0.$$

Кога $a < 1$, од инјективноста добиваме $f(a) \neq 1$, па оттука $f(a) = a$ за секој $a < 1$. **(1п)** Заклучуваме дека $f(a) = a$ за секое $a > 0$. Лесно се проверува дека оваа функција е навистина решение. **(1п)** $\square$

Втор начин. Нека смената во дадената функција е $P(x, y)$.
Да претпоставиме дека постојат $a, b \in \mathbb{R}^+$ за кои $f(a) = f(b)$. Смените $P(a, \frac{1}{af(a)})$ и $P(b, \frac{1}{bf(b)})$ ни даваат

$$\frac{1}{b} + b = f\left(\frac{1}{f(b)} + f(b)\right) = f\left(\frac{1}{f(a)} + f(a)\right) = \frac{1}{a} + a,$$

што е еквивалентно со $(ab-1)(a-b) = 0$. Значи равенството $f(a) = f(b)$ имплицира $a = b$ или $a = \frac{1}{b}$ (1). **(2п)**

Смената $P(\frac{x}{2}, \frac{x}{2f(\frac{x}{2})})$ ни дава:

$$f\left(\frac{x^2}{4\cdot f(\frac{x}{2})}+f\left(\frac{x}{2}\right)\right)=x,$$

што повлекува дека функцијата f е сурјективна. Понатаму, ова имплицира дека постои $k\in\mathbb{R}^+$ таков што $f(k)=1$. Сега, смената $P(k,x)$ ни дава $f(kx+1)=x+k$ (2). **(1п)** Разгледуваме три случаи:

1° $k>1$
Заменувајќи $\frac{k-1}{k}$ за x (2) имплицира $1=f(k)=f(k\cdot\frac{k-1}{k}+1)=\frac{k-1}{k}+k$, т.е. $k^2=1$, што е контрадикција со претпоставката $k>1$. **(1п)**

2° $k=1$
Равенството (2) е сега еквивалентно со $f(x+1)=x+1$, т.е. $f(x)=x$ за $x\in(1,+\infty)$. Земајќи доволно големо y така што $y>1$ и $xy+f(x)>1$ и заменувајќи го во почетната функционална равенка имаме $xy+f(x)=yf(x)+x$, односно $(y-1)(f(x)-x)=0$. Со оглед на тоа дека $y>1$, добиваме дека $f(x)=x$ за сите $x\in\mathbb{R}^+$. **(1п)**

3° $k<1$
Заменувајќи $1-k$ за x во (2) имаме $f(k-k^2+1)=1=f(k)$, што според (1) имплицира $k-k^2+1=k$ т.е. $k^2=1$ (што противречи на $0<k<1$) или пак $k-k^2+1=\frac{1}{k}$, што е еквивалентно со $(k-1)^2(k+1)=0$ (но ова повторно противречи на $0<k<1$). **(1п)**

Оттука, единственото можно решение на дадената функционална равенка е $f(x)=x$. Лесно се проверува дека идентичната функција ја задоволува равенката. **(1п)** ☐

Трет начин. Бирајќи $y=1$ добиваме $f(x+f(x))=x+f(x)$. Оттука, постои $u\in\mathbb{R}^+$ таков што $f(u)=u$. **(2п)** Заменувајќи $x=u$ во дадената равенка добиваме дека: $f(u(y+1))=u(y+1)$ за секое $y\in\mathbb{R}^+$; ова имплицира дека $f(v)=v$ за секој $v>u$. **(2п)** Сега за произволни x и $y>\max\{1,\frac{u}{x}\}$, бидејќи $xy+f(x)>u$, добиваме:

$$xy+f(x)=f(xy+f(x))=yf(x)+x\,.$$

Ова е еквивалентно со $(y-1)(f(x)-x)=0$, а како $y>1$, заклучуваме дека $f(x)=x$ за секој $x\in\mathbb{R}^+$. **(2п)** Лесно се проверува дека идентичната функција ја задоволува дадената функционална равенка. **(1п)** ☐

Задача 4. Дали равенката

$$z(y-x)(x+y)=x^3$$

има конечно или бесконечно многу решенија во множеството позитивни цели броеви x,y,z? (Образложете го одговорот.)

Решение. Одговорот е: равенката има бесконечно многу решенија во множеството позитивни цели броеви. Имено, таа е еквивалентна со

$$y^2z-x^2z=x^3.$$

Делејќи со z^3, ја добиваме еквивалентната равенка

$$\left(\frac{y}{z}\right)^2-\left(\frac{x}{z}\right)^2=\left(\frac{x}{z}\right)^3.$$

Нека $X = \left(\frac{x}{z}\right)$ и $Y = \left(\frac{y}{z}\right)$. **(2п)** Со овие смени, горната равенка добива облик:

$$Y^2 - X^2 = X^3.$$

Со оглед на тоа дека парот $X = 0, Y = 0$ ја задоволува добиената равенка, ајде да побараме (позитивни рационални) решенија од обликот $Y = tX$. Заменувајќи го Y со tX добиваме **(2п)**:

$$(t^2 - 1)X^2 = t^2X^2 - X^2 = X^3.$$

Значи, имаме решенија од обликот $\frac{x}{z} = t^2 - 1$ и $\frac{y}{z} = t(t^2 - 1)$, каде t е рационален број таков што $t, t^2 - 1 > 0$. **(1п)** Оттука, една бесконечна фамилија решенија на почетната равенка е $(x, y, z) = (t^2 - 1, t^3 - t, 1)$, за целите броеви $t \geq 2$. **(2п)** $\square$

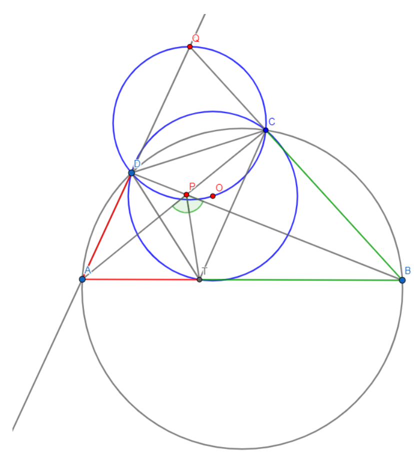
Забелешка за распределбата на поените: Последните два поена се доделуваат и доколку само се наведе низа од решенија (без доказ).

Задача 5. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник таков што $AB = AD + BC$ и $CD < AB$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точка P, а правите AD и BC се сечат во точка Q. Симетралата на $\angle APB$ ја сече страната AB во точка T. Докажете дека центарот на опишаната кружница на $\triangle CTD$ лежи на опишаната кружница на $\triangle CQD$.

Решение. Нека T' е точка на отсечката AB така што важи $AT' = AD$. Тогаш условот $AB = AD + BC$, заедно со $AB = AT' + BT'$ и $AT' = AD$, ни дава $BT' = BC$. **(1п)** Триаголниците ADP и BCP се слични **(1п)**, бидејќи $ABCD$ е тетивен. Следствено,

$$\frac{AT'}{BT'} = \frac{AD}{BC} = \frac{AP}{BP} = \frac{AT}{BT},$$

каде последното равенство се добива од теоремата за симетрала на агол. **(1п)** Заклучуваме дека $T' = T$. **(1п)** Значи, триаголникот TAD е A-рамнокрак, додека триаголникот TBC е B-рамнокрак. Нека $\angle BAQ = 2x$ и $\angle ABQ = 2y$. Да го означиме со O центарот на опишаната кружница на триаголникот CTD.



Имаме:

$$\angle COD = 2 \cdot \angle CTD = 2 \cdot (180^\circ - \angle ATD - \angle BTC)$$

$$= 2 \cdot (180^\circ - (90^\circ - x) - (90^\circ - y)) = 2x + 2y.$$

Да забележиме и дека $\angle CQD = 180^\circ - 2x - 2y$. Оттука, $\angle COD + \angle CQD = 180^\circ$. **(2п)** Ова кажува дека центарот O на опишана кружница на триаголникот CTD лежи на опишаната кружница на триаголникот CQD, што и се бараше да се докаже. **(1п)** $\square$

Забелешки за распределбата на поените:
1. Вториот поен може да се додели и само ако се констатира наведената сличност, без да се изведе пропорцијата меѓу страните на двата триаголници. Изведување на истата пропорција не носи екстра поени.
2. Третиот поен се доделува за користење или барем наведување на теоремата за симетрала на агол, независно од тоа дали е поврзана со дефинираната точка T'.
3. Наоѓање на било кој од аглите $\angle COD$ и $\angle CQD$ носи поен. Наоѓање на двата агла носи два поена, како што е наведено.
4. Заклучокот врз основа на збирот на агли носи еден поен. Заклучокот на било кој (точен) алтернативен начин го носи истиот поен.

Задача 6. Во едно училиште со 1000 ученици, секој ученик има точно четири пријатели. За група од три ученика велиме дека е *пријателска тројка* ако секои двајца од групата се пријатели. Одредете го најголемиот можен број на пријателски тројки во училиштето.

Решение. Ќе докажеме дека одговорот е 2000. Најпрво докажуваме дека овој број е достижен. Доколку во училиштето постојат 200 попарно дијсунктни групи од по 5 ученика, при што два ученика се пријатели ако и само ако се во иста група, тогаш бројот на пријателски тројки изнесува

$$\binom{5}{3} \cdot 200 = 2000. \quad \textbf{(1п)}$$

Да докажеме дека не е можно да има повеќе од 2000 пријателски тројки во училиштето. Нека T е вкупниот број на пријателски тројки. Со N го означуваме бројот на парови (t, p), каде t е пријателска тројка и p е (неподреден) пар на пријатели во таква тројка.

Секоја пријателска тројка $\{A, B, C\}$ допринесува со 3 во бројот N (бидејќи дава точно три пара пријатели: $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ и $\{A, C\}$). Оттука имаме дека $N = 3T$. **(1п)**

Да фиксираме еден пар пријатели $p = \{A, B\}$. Тврдиме дека p учествува во не повеќе од три пријателски тројки. Навистина, ако p учествува во барем 4 пријателски тројки, тогаш постојат (различни) ученици $C_1, C_2, C_3, C_4 \neq B$ кои се пријатели со A. Меѓутоа, B е исто така пријател со A, па A би имал 5 пријатели, што не е можно. Затоа, секој пар на пријатели p е дел од најмногу 3 пријателски тројки. **(1п)**

Нека P е вкупниот број на парови p (од двајца пријатели). Ако го броиме N по втората компонента (т.е. по парови пријатели) и го искористиме фактот дека секој пар учествува во најмногу 3 пријателски тројки, добиваме $N \leq P \cdot 3 = 3P$. Заклучуваме дека

$$3T = N \leq 3P \text{ и оттука } T \leq P. \quad \textbf{(2п)}$$

Од друга страна, P може едноставно да се пресмета. Имено, означувајќи го со d_i бројот на пријатели на i-тиот ученик ($i = 1, 2, ..., 1000$), имаме $d_i = 4$ за секое i. Оттаму

$$4 \cdot 1000 = d_1 + d_2 + ... + d_{1000} = 2P,$$

бидејќи секој пар на пријатели го броиме точно два пати во збирот $d_1 + d_2 + ... + d_{1000}$. Ова ни дава $P = 2000$. Значи $T \leq P = 2000$, што и сакавме да докажеме **(2п)**. $\square$