ЧЕТВРТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: СЕНИОРИ

Ден 1: Сабота, 17. Декември 2022

Задача 1. Нека a, b, c, d се цели броеви. Докажете дека за секој позитивен цел број n, постојат барем $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ позитивни цели броеви $m \leq n$ такви што $m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$ не е полн квадрат. (За секој реален број x, со $\lfloor x \rfloor$ се означува најголемиот цел број $\leq x$.)

Задача 2. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за сите $x, y > 0$ важи

$$f(xy + f(x)) = yf(x) + x.$$

Задача 3. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник впишан во кружницата ω со центар O. Правите AD и BC се сечат во точка E, а правите AB и CD се сечат во точка F. Нека P е точка на отсечката EF таква што $OP \perp EF$. Кружницата Γ_1 минува низ точките A и E при што ја допира ω во A. Кружницата Γ_2 минува низ точките C и F при што ја допира ω во C. Ако Γ_1 и Γ_2 се сечат во точките X и Y, докажете дека PO е симетрала на $\angle XPY$.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

ЧЕТВРТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: СЕНИОРИ

Ден 2: Недела, 18. Декември 2022

Задача 4. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник таков што $AB = AD + BC$ и $CD < AB$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точка P, а правите AD и BC се сечат во точка Q. Симетралата на $\angle APB$ ја сече страната AB во точка T. Докажете дека центарот на опишаната кружница на $\triangle CTD$ лежи на опишаната кружница на $\triangle CQD$.

Задача 5. Во едно училиште со 1000 ученици, секој ученик има точно четири пријатели. За група од три ученика велиме дека е *пријателска тројка* ако секои двајца од групата се пријатели. Одредете го најголемиот можен број на пријателски тројки во училиштето.

Задача 6. Нека $\mathbb{N}$ е множеството позитивни цели броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што:

- За секој позитивен цел број $a > 2023^{2023}$ важи $f(a) \leq a$.
- За секои $a, b \in \mathbb{N}$ количникот $\frac{a^2 f(b)+b^2 f(a)}{f(a)+f(b)}$ е цел број.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.