ЧЕТВРТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: ЈУНИОРИ

Ден 1: Сабота, 17. Декември 2022

Задача 1. Низ дадена точка O во рамнината се повлечени n прави. Одредете ја најголемата можна вредност k (зависно од n) за која секогаш можеме некои k од тие n прави да обоиме црвено без притоа да формираме пар заемно нормални црвени прави.

Задача 2. Нека a, b, c, d се цели броеви. Докажете дека за секој позитивен цел број n, постојат барем $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ позитивни цели броеви $m \leq n$ такви што $m^5 + dm^4 + cm^3 + bm^2 + 2021m + a$ не е полн квадрат. (За секој реален број x, со $\lfloor x \rfloor$ се означува најголемиот цел број $\leq x$.)

Задача 3. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ такви што за сите $x, y > 0$ важи

$$f(xy + f(x)) = yf(x) + x.$$

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

ЧЕТВРТИ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

Категорија: ЈУНИОРИ

Ден 2: Недела, 18. Декември 2022

Задача 4. Дали равенката

$$z(y-x)(x+y)=x^3$$

има конечно или бесконечно многу решенија во множеството позитивни цели броеви x, y, z? (Образложете го одговорот.)

Задача 5. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник таков што $AB = AD + BC$ и $CD < AB$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точка P, а правите AD и BC се сечат во точка Q. Симетралата на $\angle APB$ ја сече страната AB во точка T. Докажете дека центарот на опишаната кружница на $\triangle CTD$ лежи на опишаната кружница на $\triangle CQD$.

Задача 6. Во едно училиште со 1000 ученици, секој ученик има точно четири пријатели. За група од три ученика велиме дека е *пријателска тројка* ако секои двајца од групата се пријатели. Одредете го најголемиот можен број на пријателски тројки во училиштето.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА