



ИЗБОРЕН ТЕСТ ЗА ИМО 2022

ДЕН 2

Среда, 18. Мај 2022

Задача 4. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што $AB < AC$. Тангентите на опишаната кружница (ABC) повлечени низ точките B и C се пресекуваат во точка Y . Нека D и E се подножјата на висините BD и CE (спуштени кон AC и AB , соодветно). Кружницата ω_1 минува низ точката A и ја допира правата DE во точката E . Слично, кружницата ω_2 минува низ точката A и ја допира правата DE во точката D . Нека X е втората пресечна точка на кружниците ω_1 и ω_2 . Докажете дека точките A, X и Y се колинеарни.

Задача 5. За дадени позитивни цели брови a и d , дефинирана е аритметичката прогресија $a_1 = a$ и $a_{n+1} = a_n + d$. За секој позитивен цел број x , нека $\omega(x)$ е бројот на различни (позитивни) прости делители на x . Докажете дека постојат бесконечно многу вредности k за кои бројот $\omega(a_k)$ е парен и бројот $\omega(a_{k+1})$ е непарен.

Задача 6. На табла се запишани броевите 1, 2 и 3. Двајца другари ја играат следната игра. Наизменично, секој од играчите на таблата допишува еден број што не го надминува 2022 и не е претходно запишан на таблата, така што новиот број е збир или производ на два броја што веќе се појавуваат на таблата. Во играта победува оној кој ќе го запише бројот 2022. Кој од играчите има победничка стратегија и зошто?

*Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.*