СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Изборен тест за ИМО 2022

Ден 1: Решенија и распределба на поени

Задача 1. Нека n е позитивен цел број. Во редица се поставени n светилки, при што секоја светилка е во една од следните две состојби: вклучена или исклучена. При секој потег, избираме цел број i ($1 \leq i \leq n$) и ја променуваме состојбата на првите i светилки во редицата. Определете ја најмалата вредност k така што после најмногу k потези секогаш може да се постигне сите светилки да се вклучени, независно од почетната конфигурација на состојби.

Решение. Одговорот е: $k = n$.

Најпрво индуктивно го докажуваме неравенството $k \leq n$. Базата на индукција, т.е. случајот $n = 1$, е тривијално задоволена. Индуктивната претпоставка е дека со најмногу n потези секогаш може да се постигне состојбата во која сите n светилки се вклучени. Да разгледаме редица од $n+1$ светилки. Доколку последната (најдесната) светилка е исклучена, тогаш при првиот потег (избирајќи $i = n+1$) ја вклучуваме оваа светилка. За настанатата конфигурација од состојби на првите n светилки, согласно индуктивната претпоставка, доволни се уште најмногу n потези за да се постигне состојбата при која сите светилки се вклучени. Значи, во овој случај, со не повеќе од $n+1$ потези успеваме да ги вклучиме сите $n+1$ светилки.

Од друга страна, доколку последната светилка е првично вклучена, тогаш со не повеќе од n потези успеваме да ги вклучиме и првите n светилки. Со ова е комплетиран индуктивниот доказ дека $k \leq n$. **(3п)**

Во продолжение го докажуваме неравенството $k \geq n$, со тоа што ќе посочиме конкретна конфигурација од почетни состојби за која се неопходни n потези. Имено, нека почетната конфигурација состојби е алтернирачка, т.е. нема две соседни светилки во иста состојба, и притоа последната (најдесната) светилка е исклучена. Ваквата конфигурација ја нарекуваме n-*алтернирачка.*

Со индукција по n ќе докажеме дека n потези се потребни за вклучување на сите светилки од n-алтернирачка почетна конфигурација. Со други зборови, докажуваме дека при најмногу $n-1$ потези, секогаш барем една од светилките е исклучена.

Ова тврдење е тривијално точно за случајот $n = 1$. Разгледуваме $(n+1)$-алтернирачка почетна конфигурација. Да претпоставиме дека оптималната (најкратка) низа што доведува до состојба на вклученост на сите $n+1$ светилки се состои од не повеќе од n потези. Важно е да воочи дека редоследот на потези во оваа низа е сосема небитен: имено, состојбата на секоја светилка зависи само од парноста на бројот на потези во кои се дејствува врз неа. Бидејќи барем еден потег ја менува почетната состојба на последната светилка, можеме да претпоставиме дека тоа е првиот потег. Всушност тоа е единствениот таков потег (заради претпоставената оптималност на низата потези). Но после овој потег состојбите на првите n светилки формираат n-алтернирачка конфигурација и притоа секој од преостаните (најмногу $n-1$) потези воопшто не дејствува врз последната светилка. Оттука, согласно индуктивната претпоставка, барем една од првите n светилки е исклучена после завршниот потег од низата. Оваа противречност го комплетира индуктивниот доказ. **(4п)** $\square$

Задача 2. Даден е цел број $n \geq 2$. Нека $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ се такви што сите корени на полиномот $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ се позитивни реални броеви. Одредете ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$.

Решение. Одговорот е: $\frac{2n}{n-1}$.

Нека $t_1, t_2, ..., t_n$ е енумерација на корените на полиномот $P(x)$ (сите се позитивни реални броеви). Од Виетовите формули имаме

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = -\frac{a_{n-1}}{1} = -a_{n-1}$$

и

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} t_i t_j = \frac{a_{n-2}}{1} = a_{n-2}.$$

Да забележиме дека

$$\sum_{i=1}^{n} t_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_i t_j = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}. \quad \textbf{(2п)}$$

Неравенството на Коши-Шварц дава

$$n \cdot (a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}) = n \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 = a_{n-1}^2.$$

Следствено

$$(n-1) \cdot a_{n-1}^2 \geq 2n \cdot a_{n-2} \iff \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} \geq \frac{2n}{n-1}. \quad \textbf{(3п)}$$

За да докажеме дека вредноста $\frac{2n}{n-1}$ е навистина достижна, го искористиме полиномот $P(x) = (x-1)^n$. Така $t_1 = t_2 = ... = t_n = 1 > 0$. Да забележиме дека за овој конкретен избор на полином важи $a_{n-1} = -\sum_{i=1}^{n} t_i = -n$ и $a_{n-2} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_i t_j = \binom{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot (n^2 - n)$, што значи дека

$$\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} = \frac{2n^2}{n^2 - n} = \frac{2n}{n-1}. \quad \textbf{(2п)}$$

$\square$

Задача 3. Нека $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ги разгледуваме сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со особина за секои броеви $a, b, n \in \mathbb{N}$ да важи $f(f(n) + n) = n$ и $f(a + b - 1) \leq f(a) + f(b)$. Докажете дека за $f(2022)$ има најмногу две можни вредности.

Решение. Доколку обележиме $f(1) = a$, имаме $f(a+1) = 1$ и $f(a+2) = f(f(a+1)+a+1) = a+1$.

Ќе докажеме дека $f(aF_i + F_{i+1}) = aF_{i-1} + F_i$, каде F_i е i-тиот член на Фибоначиевата низа ($F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$). Равенството е точно за $i = 1$. Ако го претпоставиме равенството $f(aF_i+F_{i+1}) = aF_{i-1}+F_i$, добиваме $f(aF_{i+1}+F_{i+2}) = f((aF_{i-1}+F_i)+(aF_i+F_{i+1})) = f(f(aF_i + F_{i+1}) + (aF_i + F_{i+1})) = aF_i + F_{i+1}$.

Следствено, индуктивно важи

$$f(aF_i + F_{i+1}) = aF_{i-1} + F_i\,, \tag{1}$$

за секој природен број i.

Лема. За секој природен број a постојат бесконечно многу природни броеви m такви што $F_m \equiv 1 \pmod a$.

Доказ: Нека a е природен број. Очигледно $F_1 = 1 \equiv 1 \pmod a$. Ја разгледуваме низата $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ од (најмали ненегативни) остатоци на F_i по модул a. Бидејќи има конечно многу такви остатоци (имено a), пар од последвателни остатоци мора да се повторува (после најмногу a^2 индекси). Уште повеќе почнувајќи од остатоците A_i и A_{i+1} можеме да ја генерираме целата низа во двете насоки. Ова следува од равенствата $A_{i+2} \equiv A_{i+1}+A_i \pmod a$ и $A_{i-1} \equiv A_{i+1}-A_i \pmod a$. Според ова низата $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ е периодична, па $A_{k\cdot t+1} = A_1 = 1$, каде t е основниот период; следствено $F_{k\cdot t+1} \equiv 1 \pmod a$ за секој природен број k.

За бројот $a = f(1)$, според лемата постои природен број n таков што $F_n \equiv 1 \pmod a$. Ова повлекува

$$\begin{aligned} aF_{n-2} + F_{n-1} = f(aF_{n-1} + F_n) &= f\left(a\cdot\left(F_{n-1} + \frac{F_n - 1}{a}\right) + 1\right) \\ &\le \left(F_{n-1} + \frac{F_n - 1}{a}\right)\cdot f(a+1) \\ &= F_{n-1} + \frac{F_n - 1}{a}\,. \end{aligned}$$

Значи $a^2 \le \frac{F_n-1}{F_{n-2}} < 3$, и оттука $a = 1$. Со замена во (1) добиваме $f(F_{n+1}) = F_n$. **(2п)**

Да воочиме дека

$$f(n+1) = f(n+2-1) \le f(n) + f(2) = f(n) + 1\,. \tag{2}$$

Со помош на индукција ќе докажеме дека f е монотоно растечка, од каде ќе следува дека $f(n+1) \in \{f(n), f(n)+1\}$.

За $n \in \{1,2\}$ секако важи $f(n+1) \ge f(n)$. Да претпоставиме дека $f(m) \ge f(m-1)$ за секој $m < n$, и нека $f(n) = k$. Ја разгледуваме низата со општ член $B_i = i + f(i)$, за која добиваме $B_{i+1} - B_i = f(i+1) - f(i) + 1$. Користејќи го (2), заклучуваме дека за секој $i+1 < n$ важи $1 \le B_{i+1} - B_i \le 2$. Според ова не постојат два последователни природни броеви кои не се во низата $(B_i)_{i=1}^{\infty}$. Следува дека постои природен број i таков што $B_i \in \{n-1, n\}$.

Ако $n = i + f(i)$, тогаш $i = f(f(i)+i) = f(n) = k$. Од (2) и индуктивната претпоставка добиваме $f(k-1) \in \{f(k)-1, f(k)\}$, па $f(f(k-1)+k-1) = k-1 = f(n)-1$. Бидејќи $f(k)+k = n$, заклучуваме дека важи $f(k-1)+k-1 \in \{n-2, n-1\}$. Од (2) добиваме $f(n-1) \le k = f(n)$.

Ако $n-1 = i + f(i)$, тогаш $f(n-1) = i$. Доколку $k < i$, важи $i+1+f(i+1) > n$, па $f(i+1) = f(i)+1$ и $f(n+1) = i+1 > f(n)+1$. Но ова противречи на (2), што значи дека мора да важи $k \ge i$; оттука $f(n) \ge f(n-1)$.

Со ова ја докажавме монотоноста на f. **(2п)**

Ќе докажеме уште дека $f(n) \in \left\{ \left[\frac{n}{\phi}\right], \left[\frac{n}{\phi}\right] + 1 \right\}$, каде $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Ова е точно за броевите на Фибоначи. Уште повеќе $F_{2i} = \left[\frac{F_{2i+1}}{\phi}\right] + 1$ и $F_{2i-1} = \left[\frac{F_{2i}}{\phi}\right]$.

Ако $f(k) = \left[\frac{k}{\phi}\right]$, тогаш $k = f(k + f(k)) = f(k + \left[\frac{k}{\phi}\right])$. Исто така $\frac{k+[k/\phi]}{\phi} < \frac{k\phi+k}{\phi^2} = k \cdot \frac{\phi+1}{\phi^2} = k$ и $\frac{k+[k/\phi]}{\phi} > \frac{k\phi+(k-1)}{\phi^2} = (k-1)\frac{\phi+1}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} > k-1$, што повлекува дека $f\left(k + \left[\frac{k}{\phi}\right]\right) = \left[\frac{k+[k/\phi]}{\phi} + 1\right]$.

Слично, ако $f(k) = \left[\frac{k}{\phi}\right] + 1$ тогаш $k = f\left(k + \left[\frac{k}{\phi} + 1\right]\right)$; следствено $k + 1 > \frac{k+1+[k/\phi]}{\phi} > k$, што повлекува $f\left(k + \left[\frac{k}{\phi} + 1\right]\right) = \left[\frac{k+1+[k/\phi]}{\phi}\right]$.

Според ова ако $f(m) \in \left\{ \left[\frac{m}{\phi}\right], \left[\frac{m}{\phi} + 1\right] \right\}$ за секој $m < n$ и постои k таков што $n = k + f(k)$, тогаш $f(n) \in \left\{ \left[\frac{n}{\phi}\right], \left[\frac{n}{\phi} + 1\right] \right\}$. Останува да го докажеме тврдењето кога $n \neq k + f(k)$. Според дискусијата за низата $(B_i)_{i=1}^{\infty}$, постои природен број k за кој важат равенствата $n-1 = k+f(k)$ и $n+1 = k+1+f(k+1)$.

Од $f(k) = n-1-k \in \left\{ \left[\frac{k}{\phi}\right], \left[\frac{k}{\phi}\right] + 1 \right\}$ добиваме $n \geq k + \left[\frac{k}{\phi}\right] + 1 > k\left(1 + \frac{1}{\phi}\right) = k\phi$. Слично, од $f(k+1) = (n+1) - (k+1) = n - k \in \left\{ \left[\frac{k+1}{\phi}\right], \left[\frac{k+1}{\phi}\right] + 1 \right\}$ следува $n \leq k + \left[\frac{k}{\phi}\right] + 2 < (k+1) \cdot \left(1 + \frac{1}{\phi}\right) = (k+1)\phi$. Заклучуваме дека $\left[\frac{n}{\phi}\right] = k$. Од монотоноста на f следува дека $f(n) \in \{k, k+1\}$, односно $f(n) \in \left\{ \left[\frac{n}{\phi}\right], \left[\frac{n}{\phi}\right] + 1 \right\}$, што и сакавме да докажеме.

Според ова $f(2022) \in \left\{ \left[\frac{2022}{\phi}\right], \left[\frac{2022}{\phi}\right] + 1 \right\}$, т.е. докажавме дека има најмногу две можни вредности. **(3п)** $\square$