СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Изборен тест за ИМО 2022

Ден 1

Вторник, 17. Мај 2022

Задача 1. Нека n е позитивен цел број. Во редица се поставени n светилки, при што секоја светилка е во една од следните две состојби: вклучена или исклучена. При секој потег, избираме цел број i $(1 \leq i \leq n)$ и ја променуваме состојбата на првите i светилки во редицата. Определете ја најмалата вредност k така што после најмногу k потези секогаш може да се постигне сите светилки да се вклучени, независно од почетната конфигурација на состојби.

Задача 2. Даден е цел број $n \geq 2$. Нека $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in \mathbb{R}$ се такви што сите корени на полиномот $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1x + a_0$ се позитивни реални броеви. Одредете ја најмалата можна вредност на изразот $\frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$.

Задача 3. Нека $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Ги разгледуваме сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ со особина за секои броеви $a, b, n \in \mathbb{N}$ да важи $f(f(n) + n) = n$ и $f(a + b - 1) \leq f(a) + f(b)$. Докажете дека за $f(2022)$ има најмногу две можни вредности.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.