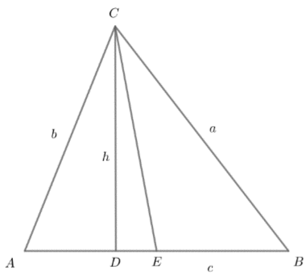
РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ ЗА IX ОДДЕЛЕНИЕ

1. Нека a, b, c се броеви различни од нула, такви што $b(c+a)$ е аритметичка средина на броевите $a(b+c)$ и $c(a+b)$. Ако $b=\frac{2019}{2020}$, пресметај ја аритметичката средина на броевите $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ и $\frac{1}{c}$.

Решение. (**Нумерус 46-1, Конкурсни задачи, 8-9 одделение, задача 3708**) Од условот имаме $a(b+c)+c(a+b)=2b(c+a)$ **(10 бодови)**, што е еквивалентно со $2ac=ab+bc$ **(5 бодови)**. По делењето на последното равенство со abc ($\neq 0$ бидејќи $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$) добиваме $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$ **(5 бодови)**. Користејќи го последно добиеното равенство, за бараната аритметичка средина се добива $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{b}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{b}=\frac{2020}{2019}$ **(5 бодови)**.

2. Во остроаголниот ΔABC должините на страните a, b и c се поврзани со релацијата $a+b=2c$, каде што $a>b$. Од темето C се повлечени висина $\overline{CD}$ и тежишна линија $\overline{CE}$. Докажи дека $\overline{DE}=a-b$.

Решение. (**Нумерус 46-4, Конкурсни задачи, 9 одделение, задача 3827**) Точката E е средишна за страната



c, па важи $\overline{AE}=\overline{BE}=\frac{c}{2}$. Од триаголникот ΔADC имаме дека $h^2=b^2-\overline{AD}^2=b^2-\left(\frac{c}{2}-\overline{DE}\right)^2$, **(4 бодови)** а од триаголникот ΔBDC имаме дека $h^2=a^2-\overline{BD}^2=a^2-\left(\frac{c}{2}+\overline{DE}\right)^2$. **(4 бодови)** Со изедначување на висините добиваме $b^2-\left(\frac{c}{2}-\overline{DE}\right)^2=a^2-\left(\frac{c}{2}+\overline{DE}\right)^2$, **(7 бодови)** т.е. $b^2-\frac{c^2}{4}+c\overline{DE}-\overline{DE}^2$ $=a^2-\frac{c^2}{4}-c\overline{DE}-\overline{DE}^2$, $b^2+c\overline{DE}=a^2-c\overline{DE}$, т.е. $2c\overline{DE}=a^2-b^2$.**(5 бодови)** Но, $a+b=2c$, па следува дека $(a+b)\overline{DE}=(a-b)(a+b)$, т.е. $\overline{DE}=a-b$, што требаше да се докаже. **....(5 бодови)**

3. Годините на таткото и неговите две деца (не се близнаци) се степени на ист прост број. Пред една година бројот на годините на секој од нив бил прост број. Колку години има сега таткото, а колку има секое од неговите деца? (Познато е дека такото има помалку од сто години)

Решение. Нека p^a, p^b и p^c се бараните броеви на годините, каде што p е прост број, а a, b и c се природни броеви **(5 бодови)**. По услов на задачата имаме дека пред една година броевите на годините p^a-1, p^b-1 и p^c-1 се прости броеви **(5 бодови)**. Ако $p=2$, тогаш степените на бројот 2 се:

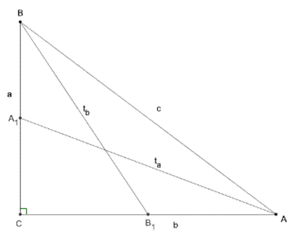
2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ... **(5 бодови)**

Од нив ги избираме оние од кои кога ќе се одземе 1 се добива прост број. Тоа се броевите 4, 8 и 32 (бидејќи 4-1=3, 8-1=7 и 32-1=31). Бидејќи тешко дека некој ќе има повеќе од 120 години, единствена можност е таткото да има 32 години, едното дете 8 години и другото 4 години **(5 бодови)**.

Ако $p\geq 3$, тогаш p^a, p^b и p^c се непарни броеви. Кога од нив ќе се одземе бројот 1 се добиваат парни броеви кои не може да се прости броеви. Значи, задачата нема друго решение. **(5 бодови)**

4. Ако тежишните линии на правоаголен триаголник може да се страни на правоаголен триаголник, тогаш должината на барем една катета на дадениот триаголник е ирационален број. Докажи!

Решение. За точен цртеж **(5 бодови)** Од цртежот следува: $t_a^2=b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$, $t_b^2=a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$, $t_c=R=\frac{c}{2}$



(5бодови) Од $t_c^2=\frac{c^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{4}=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2$ следува дека t_c е помала и од t_a и од t_b. **(4бодови)** Нека со тежишните линии на дадениот триаголник може да се формира правоаголен триаголник. Тогаш една од нив е најголема т.е. е хипотенуза, а тоа може да е од t_a или t_b. Без губење на општост, нека е тоа t_b. **(2бодови)**
Тогаш според Питагоровата теорема важи: $t_b^2=t_a^2+t_c^2$. Ако изразите за квадратите на тежишните линии ги замениме во последната формула имаме: $a^2+\frac{b^2}{4}=b^2+\frac{a^2}{4}+\frac{c^2}{4}$ т.е. $3a^2=3b^2+c^2$. Од $c^2=a^2+b^2$ добиваме дека $a^2=2b^2$, т.е. $a=b\sqrt{2}$. **(4 бодови)** Ако b е ирационален број, доказот е завршен. Ако b е рационален број, тогаш а е ирационален број и доказот е завршен. **(5 бодови)**