



**45 РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА**

**12.03.2022**

**Четврта година / А група**

1. Нека  $A$  е 19-елементно подмножество од множеството  $B = \{1,4,7,10,13,\dots,100\}$ . Докажи дека множеството  $A$  содржи два елемента чиј збир е делив со 104.
  2. Одреди ги сите парови цели броеви  $x$  и  $y$  такви што  $1 + 2026x + 2028y = xy$ .
  3. Во триаголникот  $ABC$ , симетралата на аголот во темето  $A$  ја сече страната  $BC$  во точка  $D$ , а симетралата на аголот во темето  $C$  ја сече страната  $AB$  во точка  $E$ . Аголот во темето  $B$  е поголем од  $60^\circ$ . Докажи дека  $\overline{AE} + \overline{CD} < \overline{AC}$ .
  4. Низата  $f(1), f(2), f(3), \dots$  е дефинирана со формулата  $f(n) = \frac{1}{n} \left( \left[ \frac{n}{1} \right] + \left[ \frac{n}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{n}{n} \right] \right)$ , каде  $[x]$  го означува целиот дел од  $x$ . Докажи дека  $f(n+1) < f(n)$  за бесконечно многу природни броеви  $n$ .
- Забелешка.  $[x]$  е најголемиот цел број кој не е поголем од  $x$ , односно  $[x] = k \Leftrightarrow k \leq x < k+1, k \in \mathbb{Z}$ .



**45 РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА**

**12.03.2022**

**Четврта година / А група**

1. Нека  $A$  е 19-елементно подмножество од множеството  $B = \{1,4,7,10,13,\dots,100\}$ . Докажи дека множеството  $A$  содржи два елемента чиј збир е делив со 104.
  2. Одреди ги сите парови цели броеви  $x$  и  $y$  такви што  $1 + 2026x + 2028y = xy$ .
  3. Во триаголникот  $ABC$ , симетралата на аголот во темето  $A$  ја сече страната  $BC$  во точка  $D$ , а симетралата на аголот во темето  $C$  ја сече страната  $AB$  во точка  $E$ . Аголот во темето  $B$  е поголем од  $60^\circ$ . Докажи дека  $\overline{AE} + \overline{CD} < \overline{AC}$ .
  4. Низата  $f(1), f(2), f(3), \dots$  е дефинирана со формулата  $f(n) = \frac{1}{n} \left( \left[ \frac{n}{1} \right] + \left[ \frac{n}{2} \right] + \dots + \left[ \frac{n}{n} \right] \right)$ , каде  $[x]$  го означува целиот дел од  $x$ . Докажи дека  $f(n+1) < f(n)$  за бесконечно многу природни броеви  $n$ .
- Забелешка.  $[x]$  е најголемиот цел број кој не е поголем од  $x$ , односно  $[x] = k \Leftrightarrow k \leq x < k+1, k \in \mathbb{Z}$ .