

СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА
МАКЕДОНИЈА



25 ГОДИНИ ЈУНИОРСКА
МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА
ОЛИМПИЈАДА

Мирко Петрушевски
Илија Јовчески
Никола Велов
Петар Филиповски
Делчо Лешковски
Анастасија Трајанова

Скопје, 2022

Издавач: Сојуз на математичари на Македонија

Архимедова 3, 1000 Скопје

sojuz.na.matematicari@gmail.com

Печати: Графоден, Скопје

Тираж: 500 примероци

Уредници: Мирко Петрушевски, Илија Јовчески, Никола Велов, Петар Филиповски, Делчо Лешковски, Анастасија Трајанова

Графички дизајн: Еми Ермилова

CIP - Каталогизација во публикација Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(079.1)

25 години Јуниорска македонска математичка олимпијада / [уредници Мирко Петрушевски ... и др.]. - Скопје : Сојуз на математичари на Македонија, 2022. - 216 стр. : илустр. ; 25 см

Други автори: Илија Јовчески, Никола Велов, Петар Филиповски, Делчо Лешковски, Анастасија Трајанова. - Библиографија: стр. 216

ISBN 978-608-4929-03-1

а) Математика – Задачи од натпревари

COBISS.MK-ID 56623109

Содржина

1	Вовед во математичка логика	9
1.1	Вовед (мотивација)	9
1.2	Математичко заклучување	10
1.2.1	Индуктивно и дедуктивно заклучување	10
1.2.2	Пример и контрапример	12
1.2.3	Исказна логика	14
1.2.4	Доказ со контрадикција	20
1.2.5	Квантификатори	22
1.3	Множества, релации, функции	23
2	Задачи	27
2.1	ЈММО 1997	28
2.2	ЈММО 1998	29
2.3	ЈММО 1999	30
2.4	ЈММО 2000	31
2.5	ЈММО 2001	32
2.6	ЈММО 2002	33
2.7	ЈММО 2003	34
2.8	ЈММО 2004	35
2.9	ЈММО 2005	36
2.10	ЈММО 2006	37
2.11	ЈММО 2007	38

2.12	JMMO 2008	40
2.13	JMMO 2009	41
2.14	JMMO 2010	42
2.15	JMMO 2011	43
2.16	JMMO 2012	44
2.17	JMMO 2013	45
2.18	JMMO 2014	46
2.19	JMMO 2015	47
2.20	JMMO 2016	48
2.21	JMMO 2017	49
2.22	JMMO 2018	50
2.23	JMMO 2019	51
2.24	JMMO 2020	52
2.25	JMMO 2021	53
3	Решенија	55
3.1	JMMO 1997	56
3.2	JMMO 1998	61
3.3	JMMO 1999	65
3.4	JMMO 2000	69
3.5	JMMO 2001	75
3.6	JMMO 2002	80
3.7	JMMO 2003	84
3.8	JMMO 2004	89
3.9	JMMO 2005	93
3.10	JMMO 2006	97
3.11	JMMO 2007	107
3.12	JMMO 2008	113
3.13	JMMO 2009	117
3.14	JMMO 2010	119
3.15	JMMO 2011	125
3.16	JMMO 2012	132
3.17	JMMO 2013	143
3.18	JMMO 2014	147

СОДРЖИНА

5

3.19	ЈММО 2015	156
3.20	ЈММО 2016	164
3.21	ЈММО 2017	173
3.22	ЈММО 2018	178
3.23	ЈММО 2019	189
3.24	ЈММО 2020	194
3.25	ЈММО 2021	205
4	За понатаму	215

Предговор

Секоја година на крајот на месецот мај или почетокот на месецот јуни се одржува Јуниорската македонска математичка олимпијада (ЈММО). На неа учество обезбедуваат најдобрите ученици од седмо, осмо и деветто одделение, а најдобрите шест од нив ја претставуваат Македонија на Јуниорската балканска математичка олимпијада (ЈБМО). Оваа книга претставува еден јубилеј, 25 години ЈММО.

Книгата ги содржи сите задачи од овој натпревар, почнувајќи од далечната 1997, кога се одржа првата ЈММО, па се до последната олимпијада одржана во 2021 година. Задачите се преработени, па покрај официјалните решенија, имаат и нови оригинални решенија. Некои од задачите имаат дури и по четири различни решенија. Голема благодарност на сите кои допринесоа со свои сугестии и алтернативни решенија за задачите.

Покрај задачите, во книгата се наоѓаат две дополнителни поглавја кои што оваа книга ја прават различна од останатите од ваков тип. Тоа се првата и последната глава за кои што мислиме дека е најдобро први да се прочитаат. Овие две глави се од значаен интерес за сите вас, бидејќи ќе ви овозможат да ја искористите оваа книга на најдобар можен начин.

Математичките олимпијади, вклучувајќи ги и јуниорските натпревари, содржат задачи кои што бараат математички докази. Земајќи во предвид дека основите на математичкото заклучување не се изучуваат во редовната настава, ви ја приложуваме првата глава која има за цел да ве запознае со истите со помош на многу конкретни примери. Веруваме дека ова знаење ќе ви биде од голема корист и во понатамошното изучување на математиката.

Четвртата глава има за цел да ги упати сите наши потенцијални олимпијци како најдобро да се подготват за успешен пласман на математичките олимпијади. За многуте корисни сугестии и совети во оваа глава, како и приложената литература, најзаслужен е нашиот поранешен натпреварувач Виктор Симјаноски кому му изразуваме огромна благодарност.

Голема благодарност им должиме на Виктор Симјаноски и Бојан Јовески, кои во целост ги покрија трошоците за печатење на оваа книга. Исто така, сакаме да и се заблагодариме и на Еми Ермилова, која вложи многу труд и посветеност во креирањето на корицата за оваа книга.

Се надеваме дека оваа книга ќе најде свој пат до рацете на сеској млад математичар во нашата земја и ќе допринесе за уште подобри резултати на меѓународните математички натпревари во иднина.

И покрај вложениот труд, свесни сме за можни грешки. Односпред им се заблагодаруваме на сите читатели кои ќе ни упатат добронамерна критики и сугестии, со цел во некое идно издание истите да бидат коригирани.