

**ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД
СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 2022**

Четврта година/А група

Изберете еден од понудените одговори.

Следните три задачи се бодуваат со 3 поени.

1. Ако збирот на k последователни природни броеви е 45, која е најголемата можна вредност на k ?

- A. 3 Б. 5 В. 7 Г. 9 Д. 11

Одговор. Г

2. Низата на Фибоначи започнува со броевите 1,1,2,3,5,8,13,... (после дадените први два члена 1 и 1, секој нареден член е збир од претходните два). Ако 36-от член на низата е 14 930 352 и 38-от член е 39 088 169, колку изнесува 40-от член на низата?

- A. 63 245 997 Б. 63 245 986 В. 102 334 153
Г. 102 334 154 Д. 102 334 155

Одговор. Д

3. За природен број n , со $P(n)$ го означуваме производот на цифрите на бројот n , додека со $S(n)$ збирот на цифрите на бројот n . За колку двоцифрени броеви важи $P(n) + S(n) = n$?

- A. 3 Б. 8 В. 9 Г. 13 Д. 23

Одговор. В

Следните четири задачи се бодуваат со 4 поени.

4. Колку пермутации (x_1, x_2, x_3, x_4) на множеството $\{1, 2, 3, 4\}$ го имаат својството: изразот $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$ не е делив со 3?

- A. 6 Б. 8 В. 12 Г. 14 Д. 16

Одговор. Б

5. Даме си игра на три ескалатори во еден мол. Едниот од ескалаторите се движи надолу, другиот нагоре, а третиот е расипан; ескалаторите во сè останато се идентични. Ескалаторите кои одат нагоре и надолу се движат со иста брзина. Претпоставуваме дека Даме трча со константна брзина. По ескалаторот кој оди нагоре Даме се качува за 6 секунди, а по оној што оди надолу се качува за 30 секунди. За колку секунди ќе се качи по ескалаторот што не работи?

- A. 10 B. 12 V. 14 Г. 16 Д. 18

Одговор. А

6. Во една населба, точно една петтина од вкупниот број жители се темнокоси жени, а истиот број се светлокоси мажи. Ако точно четири седмини од жените се светлокоси и притоа се знае дека жените во оваа населба се или со светла или со темна коса, кој од понудените одговори е можниот вкупен број на жители во населбата?

- A. 700 B. 800 V. 900 Г. 1000 Д. 1100

Одговор. В

7. Познато е дека секој жител на Логичната Земја е или тапчо или сезнајко. Тапчовците даваат секогаш неточни, а сезнајковците секогаш точни искази. Еден случаен минувач го наслушал следниов разговор помеѓу Ане, Боро и Ване, жители на Логичната Земја:

Ане: „Боро и Ване се и двајцата тапчовци!“

Боро: „Тоа е точно.“

Колкумина од Ане, Боро и Ване се тапчовци?

- A. 0 B. 1 V. 2 Г. 3 Д. не може да се каже

Одговор. В

Следните три задачи се бодуваат со 5 поени.

8. Познато е дека постои само еден четирицифрен број n за кој $\sqrt{3\sqrt{2\sqrt{n}}}$ е природен број. Колку изнесува збирот на цифрите на бројот n ?

- A. 17 B. 18 V. 19 Г. 20 Д. 21

Одговор. Б

9. Нека x , y и z се природни броеви такви што:

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{26}{21} .$$

Колку изнесува xyz ?

- А. 20 Б. 24 В. 28 Г. 32 Д. 36

Одговор. А

10. Избрани се два броја a и b од множеството $\{1, 2, 3, \dots, 26\}$, така што производот ab е еднаков на збирот од останатите броеви од множеството. Колку изнесува $|a - b|$?

- А. 15 Б. 11 В. 9 Г. 6 Д. 1

Одговор. Г

Во следните задачи внесете го одговорот (ненегативен цел број без единица мерка) или изберете го точниот одговор.

Следните 3 задачи се бодуваат со 5 поени.

11. Аритметичката средина на деветте броеви $\{9, 99, 999, \dots, 999999999\}$ е 9-цифрен број M чии цифри се различни. Која цифра не се јавува во декадниот запис на бројот M ?

Одговор. 0

12. Равенката $z^4 + z^3 + 2z^2 + 2z + 4 = 0$ има комплексен корен чии реален и имагинарен дел се еднакви. Најди го бројот кој е за 5 поголем од реалниот дел на тој корен.

Одговор. 4

13. Колку точни кубови на природни броеви се делители на бројот $3! \cdot 5! \cdot 7!$?

Одговор. 6

Следните 3 задачи се бодуваат со 6 поени.

14. На кошаркарски турнир учествувале 8 екипи и притоа секоја екипа одиграла точно по еден натпревар со секоја од останатите екипи. За победа екипите добиваат по 2 поена, за пораз 0 поени (на турнирот немало нерешен натпревар). Екипите освоиле 14, 12, 8, 8, 6, 4, 2, 2 поени, редоследно. Колку натпревари последните четири екипи на табелата имат изгубено од првите четири екипи?

Одговор. 15

15. За секој ненегативен цел број n дефинираме број $A_n = 2^{3n} + 3^{6n+2} + 5^{6n+2}$. Најдете го најголемиот заеднички делител на броевите $A_0, A_1, \dots, A_{2022}$.

Одговор. 7

16. Нека $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низата на Фибоначи дефинирана на следниот начин: $F_1 = F_2 = 1$ и $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ за $n \geq 1$. Ако x е реален број за кој важи $x^2 = x + 1$, пресметај ја вредноста на изразот $x^{2022} - xF_{2022} - F_{2021}$.

Одговор. 0

17. Пресметај ја вредноста на изразот $\sum_{k=1}^{2022} \binom{2022}{k}^2 - \binom{4044}{2022} + 2022$

Одговор. 2021

Следните три задачи се бодуваат со 7 поени.

18. Нека a, b и c се ненегативни реални броеви, при што најмалку два од броевите се ненулта и за броевите важи $a + b + c = ab + bc + ca$. Определи ја најмалата вредност на реалниот број k така што

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} - k \right) \leq k.$$

Одговор. 1

19. При ротација со центар во точката M и агол α (во насока спротивна на насоката на стрелките на часовникот) точката $A(1, 2)$ се пресликува во точката $A_1(6, 5)$ додека точката $B(1, 4)$ се пресликува во точката $B_1(4, 5)$. Пресметај го збирот на координатите на точката M .

Одговор. 8

20. Нека p е цел број. Познато е дека корените на равенката $x^3 + 2px^2 - px + 10 = 0$

се три последователни членови на аритметичка прогресија. Пресметај го збирот на корените на равенката.

Одговор. 6