Трет Меморијален Математички Натпревар

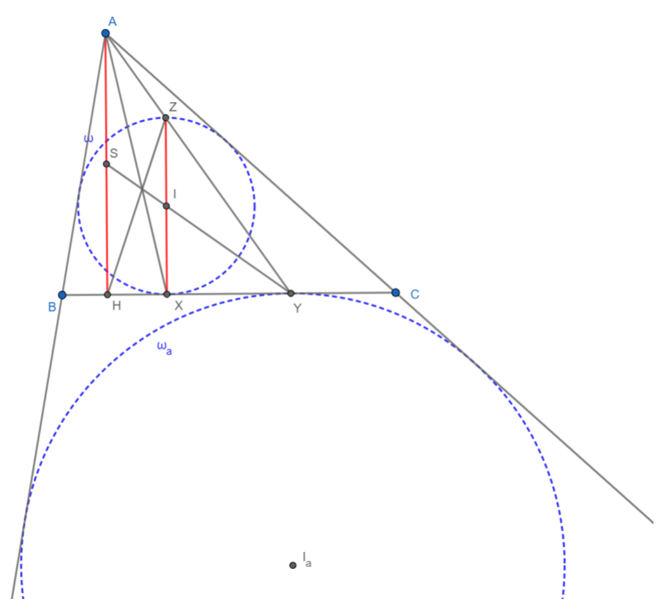
Александар Блажевски - Цане

Ден 2: Категорија СЕНИОРИ

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 4. Нека ABC е остроаголен триаголник со впишана кружница ω и A-припишана кружница ω_a. Нека I е центарот на ω. Кружниците ω и ω_a ја допираат страната BC во точките X и Y, соодветно. Нека Z е онаа пресечна точка на правата AY со ω што е поблиску до A. Точката H е подножје на висината спуштена од A. Докажете дека правите HZ, IY и AX имаат заедничка точка.

Решение. Прво ќе докажеме дека точките X, I и Z се колинеарни. Правите AB и AC се заеднички тангенти на ω и ω_a, па хомотетијата $\mathcal{H}$ со центар A и коефициент $k = \frac{AI}{AI_a}$ ја пресликува ω_a во ω. Бидејќи $Y \in \omega_a \cap AY$, сликата $\mathcal{H}(Y)$ е истовремено на кружницата $\mathcal{H}(\omega_a) = \omega$ и $\mathcal{H}(AY) = AY$, па затоа $\mathcal{H}(Y) = Z$. Од друга страна, тангентата на ω_a во Y е BC, па тангентата на ω во Z е паралелна со BC. Тоа значи дека $IZ \perp BC$, што заедно со $IX \perp BC$ ни кажува дека XZ е дијаметар во ω и дека точките X, I и Z се колинеарни. **(3 поени)**



Правата AH е нормална на BC, па $AH \parallel XZ$. Бидејќи I е средина на XZ и $AH \parallel XZ$, правата IY минува низ средината S од AH. **(2 поени)** Ако ја примениме Талесовата теорема на паралелните прави AH и XZ добиваме

$$\frac{YZ}{ZA} = \frac{YX}{XH}.$$

(1 поен)

Оттука,

$$\frac{AS}{SH} \cdot \frac{HX}{XY} \cdot \frac{YZ}{ZA} = \frac{HX}{XY} \cdot \frac{YX}{XH} = 1.$$

Сега од теоремата на Чева, правите YS, HZ и AX се конкурентни, па заклучокот следи од тоа што точката I е на правата YS. **(1 поен)** $\square$

Забелешка. За првиот дел (точките X, I и Z се колинеарни) нема можност за парцијални поени. Слично, за вториот дел ($AHXZ$ е трапез во кој правата IY ги преполовува основите AH и ZX) нема можност за парцијални поени. Последните 2 поени од решението може да се заработат и со повикување на теоремата на Штајнер (без доказ).

Задача 5. За позитивен цел број n велиме дека е *маркантен* доколку неговата бинарна репрезентација содржи повеќе единици одошто нули. (На пример, бројот 25 е маркантен бидејќи бинарната репрезентација $25 = (11001)_2$ содржи 3 единици и 2 нули). Дали постојат бесконечно многу маркантни броеви кои се полни квадрати? (Одговорот да се образложи.)

Решение. Одговор: Постојат бесконечно многу маркантни полни квадрати. Ќе дадеме два конструктивни докази и еден доказ со контрадикција.

Конструкција 1: Ќе докажеме дека за секој цел број $k > 1$ бројот

$$\frac{2^{k\cdot(2^k-1)}-1}{2^k-1} = \sum_{i=0}^{2^k-2} 2^{i\cdot k}$$

е таков што неговиот квадрат

$$a_k = \left(\frac{2^{k\cdot(2^k-1)-1}}{2^k-1}\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{2^k-2} 2^{i\cdot k}\right)^2 = \sum_{i=1}^{2^k-1} i\cdot 2^{(i-1)\cdot k} + \sum_{i=1}^{2^k-2} (2^k-i-1)\cdot 2^{(2^k+i-2)\cdot k}$$

е маркантен.

Бидејќи коефициентите пред секој степен на двојка во формулата погоре се помали од 2^k, сите се раздвоени во бинарната репрезентација. На пример, кога $k = 3$, имаме

$$(\underbrace{1}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{100}_{4}\underbrace{101}_{5}\underbrace{110}_{6}\underbrace{111}_{2^3-1}\underbrace{110}_{6}\underbrace{101}_{5}\underbrace{100}_{4}\underbrace{011}_{3}\underbrace{010}_{2}\underbrace{001}_{1})_2.$$

Исто така, бидејќи

$$1 + (2^k-2) = 2 + (2^k-3) = ... = (2^{k-1}-1) + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

е број со k единици, секој од паровите $(1, 2^k-2)$, ... , $(2^{k-1}-1, 2^{k-1})$, како и бројот 2^k-1 имаат точно k единици.

Сега можеме да го пресметаме бројот на единици во бинарната репрезентација на $a_k - k\cdot(2^k-1)$, па бидејќи бројот на неговите цифри во бинарната репрезентација е $2k\cdot(2^k-2)+1 < 2\left(k\cdot(2^k-1)\right)$, бројот a_k е маркантен за секој $k > 1$.

Конструкција 2: Ќе докажеме дека квадратот на бројот $n = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})_2$ има повеќе единици отколку нули во бинарната репрезентација за секој природен број $k \geq 0$.

Нека P е функција која што на секој позитивен цел број запишан во основа 2 му го доделува бројот на единици во неговата бинарна репрезентација. Нека Q е функција која што на секој позитивен цел број запишан во основа 2 му го доделува бројот на нули во истата репрезентација.

Во следните пресметки, ги изоставуваме заградите што означуваат бинарен запис кога работиме со броевите во бинарна репрезентација заради поедноставно претставување.

За секој ваков n имаме

$$n = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})_2 = 2^0 + 2^2 + ... + 2^{6k+4} = \frac{2^{6k+6}-1}{2^2-1} = \frac{2^{6k+6}-1}{3}.$$

Следствено, добиваме

$$\begin{aligned}
n^2 &= (2^{6k+6}-1)\cdot\frac{2^{6k+6}-1}{9} = 7(2^{6k+6}-1)\cdot\frac{2^{6k+6}-1}{2^6-1} = \\
&= (2^3-1)(2^{6k+6}-1)(1+2^6+...+2^{6k}) = \\
&= (2^3-1)(2^{12k+6}+2^{12k}+...+2^{6k+6}-2^{6k}-2^{6k-6}-...-1) = \\
&= (2^{12k+9}+2^{12k+3}+...+2^{6k+9}+2^{6k}+2^{6k-6}+...+1) - \\
&\quad (2^{12k+6}+2^{12k}+...+2^{6k+6}+2^{6k+3}+2^{6k-3}+...+2^3) = \\
&= \underbrace{100000100000...100000}_{6k}\underbrace{100000000}_{9}\underbrace{100000100000...100000}_{6k}1_2 - \\
&\quad \underbrace{000100000100...000100}_{6k}\underbrace{000100100}_{9}\underbrace{000100000100...000100}_{6k}0_2 = \\
&= [100000_2\cdot(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)+100000000_2\cdot 2^{6k+1}+1_2] - \\
&\quad [000100_2\cdot(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)+000100100_2\cdot 2^{6k+1}+0_2] = \\
&= (2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)\cdot(100000_2-000100_2) + \\
&\quad 2^{6k+1}\cdot(100000000_2-000100100_2)+(1_2-0_2) = \\
&= (2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)\cdot 011100_2 + 2^{6k+1}\cdot 011011100_2 + 1_2 = \\
&= \underbrace{011100011100...011100}_{6k}\underbrace{011011100}_{9}\underbrace{011100011100...011100}_{6k}1_2 = \\
&= \underbrace{11100011100...0111000}_{6k}\underbrace{11011100}_{8}\underbrace{011100011100...011100}_{6k}1_2.
\end{aligned}$$

Гледаме дека n^2 се состои од k блокови од облик 111000_2 (да ги наречеме овие блокови a), k блокови од облик 011100_2 (да ги наречеме овие блокови b), еден блок од облик 11011100_2 (да го наречеме блок c) и од 1_2 како најдесна цифра во записот. Но, a блоковите и b блоковите имаат својство дека $P(a) = Q(a)$, $P(b) = Q(b)$, додека за блокот c важи $P(c) = Q(c) + 2$. Значи

$$P(n^2) = k\cdot P(a) + k\cdot P(b) + P(c) + 1 = k\cdot Q(a) + k\cdot Q(b) + Q(c) + 2 + 1 = Q(n^2) + 3 > Q(n^2),$$

па бројот $n^2 = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})^2$ е маркантен полн квадрат за секој $k \geq 0$.

Распределба на поени. Секое конструктивно решение се вреднува согласно следново:

(а) Конструкција на бесконечно многу маркантни полни квадрати без доказ. **(3 поени)**

Парцијални поени: Конструкција *со доказ* на бесконечно многу полни квадрати кои имаат подеднакво многу единици и нули во бинарната репрезентација. **(1 поен)**

(б) Доказ дека конструкцијата од делот (а) е валидна. **(4 поени)**

Забелешка: Маркинг шемата дозволува **0**, **1**, **3** или **7 поени** за контструктивно решение на оваа задача. Доколку натпреварувачот даде точна конструкција на бесконечно многу маркантни полни квадрати, но не докаже валидност на конструкцијата, тогаш заработува **3 поени**.

Единствен начин да се заработи **1 поен** е со конструирање на бесконечно многу полни квадрати кои се скоро маркантни (во смисла дека имаат не помалку единици одошто нули во бинарната репрезентација. Ова е многу едноставна конструкција.

Тврдењето дека постојат бесконечно многу маркантни полни квадрати само по себе (без конструкција и без доказ) се вреднува со **0 поени**.

Доказ со контрадикција: Да претпоставиме дека постојат само конечно многу маркантни полни квадрати. Нека $m^2 = a_1a_2\ldots a_{k-1}$ е најголемиот таков број, и нека тој има точно $k-1$ цифри во бинарната репрезентација. **(1 поен)**

Го разгледуваме $s = m \cdot (2^k + 1)$. Така

$$s^2 = m^2(2^{2k} + 2^{k+1} + 1) = a_1a_2\ldots a_{k-1}a_1a_2\ldots a_{k-1}00a_1a_2\ldots a_{k-1}.$$

Да забележиме дека s^2 е маркантен, што е посакуваната противречност. Имено, постојат барем $\frac{k}{2}$ единици меѓу цифрите a_i, што повлекува дека постојат барем $\frac{3k}{2}$ единици меѓу вкупно $(3k-1)$ бинарни цифри на s^2. **(5 поени)** Бројот 1 потврдува дека множеството маркантни полни квадрати е непразно. **(1 поен)** □

Забелешка: Последниот поен се доделува само за комплетно решение со контрадикција.

Задача 6. За цел број $n \geq 1$, разгледуваме множество P_{2n} од $2n$ точки што се рамномерно распределени на кружница. Секое *совршено спарување* на овие точки се состои од n отсечки чии краеви го сочинуваат P_{2n}. Нека $\mathcal{M}_n$ е множеството од несамопресекувачки совршени спарувања на P_{2n}. За $M \in \mathcal{M}_n$ велиме дека е *централно-симетрично* доколку е инваријантно при симетрија во однос на центарот на кружницата. Одредете го (како фунција од n) вкупниот број на централно-симетрични совршени спарувања во $\mathcal{M}_n$.

Решение. Нека $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ го означува n-тиот Каталанов број, и $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{M}_n$ е множеството од централно-симетрични совршени спарувања. Ќе докажеме дека за кардиналноста (бројот на елементи) на $\mathcal{S}_n$ важи:

$$|\mathcal{S}_n| = \begin{cases} 1 & \text{ако } n = 1\,; \\ n \cdot C_{(n-1)/2} & \text{ако } n \geq 3 \text{ е непарен}\,; \\ \binom{n}{n/2} & \text{ако } n \text{ е парен}\,. \end{cases}$$

Случајот $n = 1$ е тривијален, и тогаш $\mathcal{S}_n = \mathcal{M}_n$ се состои од еден дијаметар на кружницата. Пред да преминеме на нетривијалните случаи (за непарен $n \geq 3$ и за парен $n \geq 2$), воведуваме малку терминологија и нотација. За точка P велиме дека е *затскриена позади* тетива e која не е дијаметар на кружницата, доколку P не е крајна точна на e и радиусот од центарот на кружницата до P ја пресекува e. Нека σ е ознака за рефлексијата (централната симетрија) во однос на центарот на кружницата.

Да го разгледаме случајот $n \geq 3$. Започнуваме забележувајќи дека секое спарување $M \in \mathcal{S}_n$ содржи точно еден дијаметар на кружницата. Навистина, бидејќи $e \in M$ повлекува $\sigma(e) \in M$, од $4 \nmid 2n$ следува дека постои отсечка $e \in M$ за која важи $e = \sigma(e)$, т.е., која е дијаметар.

Од друга страна, јасно е дека во $M \in \mathcal{M}_n$ не може да има повеќе дијаметри на кружницата (поради барањето спарувањето M да не е самопресекувачко). **(1 поен)**

Има n дијаметри со краеви во P_{2n}. Откако еден од овие дијаметри е избран, да го означиме со d, ги поминуваме точките од P_{2n} кои лежат на една избрана страна од d и ги именуваме редоследно со $1, 2, \ldots, n-1$. Очигледно, за било кое $M \in \mathcal{S}_n$ што го содржи d важи следново: секоја отсечка $e \in M$ има два или нуту еден крај меѓу точките $1, 2, \ldots, n-1$. Следствено, централната симетричност на елементите на $\mathcal{S}_n$ повлекува дека $|\mathcal{S}_n|/n$ е еднаков на бројот на несамопресекувачки совршени спарувања на точките $1, 2, \ldots, n-1$. **(1 поен)**

Ќе покажеме дека овој број изнесува $C_{(n-1)/2}$. За оваа цел ќе конструираме биекција помеѓу множеството од такви спарувања и множеството од бинарни стрингови со точно $(n-1)/2$ нули и исто толку единици кои ја имаат следнава *префикс особина*: во секој почетен сегмент од таквиот $(n-1)$-стринг бројот на нули не го надминува бројот на единици. (Добро е познато дека за $m \geq 1$ вкупниот број на такви $2m$-стрингови е еднаков на m-тиот Каталанов број $C_m = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$. Основната идеја на вообичаениот доказ на ова тврдење е т.н. *принцип на рефлексија* на A. D. André.) За даден $M \in \mathcal{S}_n$, ги поминуваме точките $1, 2, \ldots, n-1$ во тој редослед, и покрај секоја точка која ја сретнуваме запишуваме 0-бит или 1-бит согласно следново правило: за секоја отсечка (ребро) чии два краја се меѓу $1, 2, \ldots, n-1$ запишуваме 1 при средбата со првиот крај, и запишуваме 0 при средбата со вториот крај. Обратно, за даден бинарен стринг со $(n-1)/2$ нули и исто толку единици кој ја поседува префикс особината, да ги означиме точките $1, 2, \ldots, n-1$ со битовите од овој $(n-1)$-стринг. Потоа последователно спаруваме точка означена со бит 1 и точка означена со бит 0, водејќи сметка сите точки кои се затскриени зад така добиеното ребро да се веќе спарени. Очигледно е дека опишаните две пресликувања се заемно инверзни. **(1 поен)**

За да ја потврдиме формулата во случајот кога n е парен, воспоставуваме биекција помеѓу множеството $\mathcal{S}_n$ и колекцијата од сите бинарни стрингови со точно $n/2$ нули и исто толку единици. За ова користиме означување $1, 2, \ldots, 2n$ на точките во фиксиран кружен редослед. За произволно дадено спарување $M \in \mathcal{S}_n$, поминуваме низ првата половина од точките, т.е. од точката 1 до точката n. За секоја точка што ја сретнуваме, регистрираме еден 0-бит или 1-бит согласно следново правило: за секоја отсечка (ребро) чии два краја се меѓу точките $1, 2, \ldots, n$ запишуваме 1 при средбата со првиот крај, и запишуваме 0 при средбата со вториот крај. За секое ребро e кое има точно еден крај меѓу точките $1, 2, \ldots, n$, и реброто $\sigma(e)$ ја има истата особина, па тогаш запишуваме 0 при средбата со првата од овие две точки и запишуваме 1 при средбата со втората од овие две точки. Оваа постапка очигледно продуцира бинарен стринг со точно $n/2$ нули и исто толку единици.

Обратно, за произволно даден бинарен стринг со должина n сочинет од точно $n/2$ нули и исто толку единици, надоврзуваме една после друга две копии од овој стринг, што ни дава стринг со должина $2n$. Ги запишуваме покрај точките $1, 2, \ldots, 2n$ долж кружницата битовите од вака добиениот стринг. Потоа последователно спаруваме точка покрај која стои бит 1 со точка покрај која стои бит 0, водејќи сметка сите точки кои се затскриени зад така добиеното ребро да се веќе спарени. Бидејќи има точно n точки со бит 0 и n точки со бит 1, оваа постапка резултира со совршено спарување. Притоа, според конструкцијата, секој пар дијаметрално-спротивни точки го имаат покрај себе истиот бит, што повлекува дека секое ребро e е придружено од неговата рефлексија $\sigma(e)$, т.е., навистина добиваме елемент од $\mathcal{S}_n$.

Очигледно е дека опишаните две пресликувања се заемно инверзни. **(4 поени)** $\square$

Забелешки. Парцијални поени не се доделуваат за:

(1) случајот $n = 1$ или за било која друга мала вредност на n;
(2) споменување на Каталановите броеви или наведување на формулата за n-тиот Каталанов број;
(3) нецелосно решавање на случајот кога n е парен.