Трет Меморијален Математички Натпревар

Александар Блажевски - Цане

Ден 2: Категорија ЈУНИОРИ

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

Задача 4. Најдете ги сите позитивни цели броеви n за кои множеството $S = \{1, 2, 3, \dots 2n\}$ може да се разбие на две подмножества S_1 и S_2, т.е. $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ и $S_1 \cup S_2 = S$, така што S_1, S_2 имаат по n елементи и збирот на елементите на S_1 е делив со збирот на елементите на S_2.

Решение. Одговор: n е парен, или делив со 3, или дава остаток 1 при делење со 3.
Нека s_1 е збирот на елементите на S_1, а s_2 е збирот на елементите на S_2. Вкупниот збир изнесува $s = s_1 + s_2 = n(2n+1)$.
Бидејќи $s_2 \geq \frac{n(n+1)}{2}$, важи $\frac{s}{s_2} = \frac{s_1}{s_2} + 1 \leq \frac{4n+2}{n+1} < 4$, што повлекува дека $\frac{s_1}{s_2} = 1$ или 2. **(4 поени)**

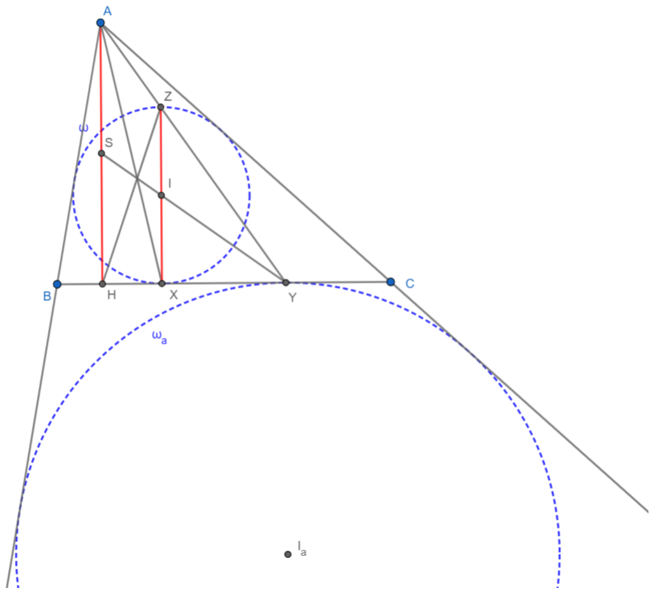
Да ги разгледаме двете можности:

Случај 1: $\frac{s_1}{s_2}$=1. Тогаш вкупниот збир $s = n(2n+1)$ е парен број, и оттука n е парен, т.е. $n = 2n_1$. Ги групираме броевите во $2n_1$ пара т.ш. збирот во секој пар изнесува $4n_1 + 1$, на следниот начин: $(1, 4n_1), (2, 4n_1 - 1), \dots, (2n_1, 2n_1 + 1)$. Ставаме n_1 од овие парови во S_1 и преостанатите n_1 парови во S_2. **(1 поен)**

Случај 2: $\frac{s_1}{s_2}$=2. Тогаш вкупниот збир $s = s_1 + s_2 = 3s_2$ е делив со 3.
(а) Ако n е делив со 3, т.е. $n = 3k$, нека S_2 го сочинуваат броевите од следните тројки: $(1, 2, 6k-2), (3, 4, 6k-4), \dots, (2k-1, 2k, 2k+2)$. Тоа се точно k тројки, секоја со збир $6k+1$. Така S_2 се состои од $n = 3k$ елементи, со вкупен збир $k(6k+1)$. **(1 поен)**
(б) Ако $2n+1$ е делив со 3, тогаш $n = 3k+1$ и $s_2 = \frac{1}{3} \times \frac{2n(2n+1)}{2} = (2k+1)(3k+1)$. Значи во S_2 треба да сместиме $n = 3k+1$ од броевите т.ш. просекот изнесува $2k+1$. Го ставаме бројот $2k+1$ во S_2, и ги додаваме броевите од k тројки од кои секоја има просек $2k+1$, односно збир $6k+3$. Со други зборови, S_2 се состои од бројот $2k+1$ и броевите од следните тројки: $(1, k+1, 5k+1), (2, k+2, 5k-1), \dots, (k, 2k, 3k+3)$. **(1 поен)** $\square$

Задача 5. Нека ABC е остроаголен триаголник со впишана кружница ω и A-припишана кружница ω_a. Нека I е центарот на ω. Кружниците ω и ω_a ја допираат страната BC во точките X и Y, соодветно. Нека Z е онаа пресечна точка на правата AY со ω што е поблиску до A. Точката H е подножје на висината спуштена од A. Докажете дека правите HZ, IY и AX имаат заедничка точка.

Решение. Прво ќе докажеме дека точките X, I и Z се колинеарни. Правите AB и AC се заеднички тангенти на ω и ω_a, па хомотетијата $\mathcal{H}$ со центар A и коефициент $k = \frac{AI}{AI_a}$ ја пресликува ω_a во ω. Бидејќи $Y \in \omega_a \cap AY$, сликата $\mathcal{H}(Y)$ е истовремено на кружницата $\mathcal{H}(\omega_a) = \omega$ и $\mathcal{H}(AY) = AY$, па затоа $\mathcal{H}(Y) = Z$. Од друга страна, тангентата на ω_a во Y е BC, па тангентата на ω во Z е паралелна со BC. Тоа значи дека $IZ \perp BC$, што заедно со $IX \perp BC$ ни кажува дека XZ е дијаметар во ω и дека точките X, I и Z се колинеарни. **(3 поени)**



Правата AH е нормална на BC, па $AH \parallel XZ$. Бидејќи I е средина на XZ и $AH \parallel XZ$, правата IY минува низ средината S од AH. **(2 поени)** Ако ја примениме Талесовата теорема на паралелните прави AH и XZ добиваме

$$\frac{YZ}{ZA} = \frac{YX}{XH}.$$

(1 поен)

Оттука,

$$\frac{AS}{SH} \cdot \frac{HX}{XY} \cdot \frac{YZ}{ZA} = \frac{HX}{XY} \cdot \frac{YX}{XH} = 1.$$

Сега од теоремата на Чева, правите YS, HZ и AX се конкурентни, па заклучокот следи од тоа што точката I е на правата YS. **(1 поен)** □

Забелешка. За првиот дел (точките X, I и Z се колинеарни) нема можност за парцијални поени. Слично, за вториот дел ($AHXZ$ е трапез во кој правата IY ги преполовува основите AH и ZX) нема можност за парцијални поени. Последните 2 поени од решението може да се заработат и со повикување на теоремата на Штајнер (без доказ).

Задача 6. За позитивен цел број n велиме дека е *маркантен* доколку неговата бинарна репрезентација содржи повеќе единици одошто нули. (На пример, бројот 25 е маркантен бидејќи бинарната репрезентација $25 = (11001)_2$ содржи 3 единици и 2 нули). Дали постојат бесконечно многу маркантни броеви кои се полни квадрати? (Одговорот да се образложи.)

Решение. Одговор: Постојат бесконечно многу маркантни полни квадрати. Ќе дадеме два конструктивни докази и еден доказ со контрадикција.

Конструкција 1: Ќе докажеме дека за секој цел број $k > 1$ бројот

$$\frac{2^{k\cdot(2^k-1)}-1}{2^k-1} = \sum_{i=0}^{2^k-2} 2^{i\cdot k}$$

е таков што неговиот квадрат

$$a_k = \left(\frac{2^{k\cdot(2^k-1)-1}}{2^k-1}\right)^2 = \left(\sum_{i=0}^{2^k-2} 2^{i\cdot k}\right)^2 = \sum_{i=1}^{2^k-1} i\cdot 2^{(i-1)\cdot k} + \sum_{i=1}^{2^k-2} (2^k-i-1)\cdot 2^{(2^k+i-2)\cdot k}$$

е маркантен.

Бидејќи коефициентите пред секој степен на двојка во формулата погоре се помали од 2^k, сите се раздвоени во бинарната репрезентација. На пример, кога $k = 3$, имаме

$$(\underbrace{1}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}\underbrace{100}_{4}\underbrace{101}_{5}\underbrace{110}_{6}\underbrace{111}_{2^3-1}\underbrace{110}_{6}\underbrace{101}_{5}\underbrace{100}_{4}\underbrace{011}_{3}\underbrace{010}_{2}\underbrace{001}_{1})_2.$$

Исто така, бидејќи

$$1 + (2^k-2) = 2 + (2^k-3) = ... = (2^{k-1}-1) + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

е број со k единици, секој од паровите $(1, 2^k-2)$, ... , $(2^{k-1}-1, 2^{k-1})$, како и бројот 2^k-1 имаат точно k единици.

Сега можеме да го пресметаме бројот на единици во бинарната репрезентација на $a_k - k\cdot(2^k-1)$, па бидејќи бројот на неговите цифри во бинарната репрезентација е $2k\cdot(2^k-2)+1 < 2\left(k\cdot(2^k-1)\right)$, бројот a_k е маркантен за секој $k > 1$.

Конструкција 2: Ќе докажеме дека квадратот на бројот $n = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})_2$ има повеќе единици отколку нули во бинарната репрезентација за секој природен број $k \geq 0$.

Нека P е функција која што на секој позитивен цел број запишан во основа 2 му го доделува бројот на единици во неговата бинарна репрезентација. Нека Q е функција која што на секој позитивен цел број запишан во основа 2 му го доделува бројот на нули во истата репрезентација.

Во следните пресметки, ги изоставуваме заградите што означуваат бинарен запис кога работиме со броевите во бинарна репрезентација заради поедноставно претставување.

За секој ваков n имаме

$$n = (\underbrace{1010...101}_{6k+5})_2 = 2^0 + 2^2 + ... + 2^{6k+4} = \frac{2^{6k+6}-1}{2^2-1} = \frac{2^{6k+6}-1}{3}.$$

Следствено, добиваме

$$n^2 = (2^{6k+6}-1)\cdot\frac{2^{6k+6}-1}{9} = 7(2^{6k+6}-1)\cdot\frac{2^{6k+6}-1}{2^6-1} =$$
$$= (2^3-1)(2^{6k+6}-1)(1+2^6+...+2^{6k}) =$$

$$
\begin{gathered}
=(2^3-1)(2^{12k+6}+2^{12k}+...+2^{6k+6}-2^{6k}-2^{6k-6}-...-1)= \\
=(2^{12k+9}+2^{12k+3}+...+2^{6k+9}+2^{6k}+2^{6k-6}+...+1)- \\
(2^{12k+6}+2^{12k}+...+2^{6k+6}+2^{6k+3}+2^{6k-3}+...+2^3)= \\
=\underbrace{100000100000...100000}_{6k}\underbrace{100000000}_{9}\underbrace{100000100000...100000}_{6k}1_2- \\
\underbrace{000100000100...000100}_{6k}\underbrace{000100100}_{9}\underbrace{000100000100...000100}_{6k}0_2= \\
=[100000_2\cdot(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)+100000000_2\cdot 2^{6k+1}+1_2]- \\
[000100_2\cdot(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)+000100100_2\cdot 2^{6k+1}+0_2]= \\
=(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)\cdot(100000_2-000100_2)+ \\
2^{6k+1}\cdot(100000000_2-000100100_2)+(1_2-0_2)= \\
=(2^{12k+4}+2^{12k-2}+...+2^{6k+10}+2^{6k-5}+...+2)\cdot 011100_2+2^{6k+1}\cdot 011011100_2+1_2= \\
=\underbrace{011100011100...011100}_{6k}\underbrace{011011100}_{9}\underbrace{011100011100...011100}_{6k}1_2= \\
=\underbrace{11100011100...0111000}_{6k}\underbrace{11011100}_{8}\underbrace{011100011100...011100}_{6k}1_2.
\end{gathered}
$$

Гледаме дека n^2 се состои од k блокови од облик 111000_2 (да ги наречеме овие блокови a), k блокови од облик 011100_2 (да ги наречеме овие блокови b), еден блок од облик 11011100_2 (да го наречеме блок c) и од 1_2 како најдесна цифра во записот. Но, a блоковите и b блоковите имаат својство дека $P(a)=Q(a)$, $P(b)=Q(b)$, додека за блокот c важи $P(c)=Q(c)+2$. Значи

$$P(n^2)=k\cdot P(a)+k\cdot P(b)+P(c)+1=k\cdot Q(a)+k\cdot Q(b)+Q(c)+2+1=Q(n^2)+3>Q(n^2),$$

па бројот $n^2=(\underbrace{1010...101}_{6k+5})^2$ е маркантен полн квадрат за секој $k\geq 0$.

Распределба на поени. Секое конструктивно решение се вреднува согласно следново:

(а) Конструкција на бесконечно многу маркантни полни квадрати без доказ. **(3 поени)**

Парцијални поени: Конструкција *со доказ* на бесконечно многу полни квадрати кои имаат подеднакво многу единици и нули во бинарната репрезентација. **(1 поен)**

(б) Доказ дека конструкцијата од делот (а) е валидна. **(4 поени)**

Забелешка: Маркинг шемата дозволува **0**, **1**, **3** или **7 поени** за контструктивно решение на оваа задача. Доколку натпреварувачот даде точна конструкција на бесконечно многу маркантни полни квадрати, но не докаже валидност на конструкцијата, тогаш заработува **3 поени**.

Единствен начин да се заработи **1 поен** е со конструирање на бесконечно многу полни квадрати кои се скоро маркантни (во смисла дека имаат не помалку единици одошто нули во бинарната репрезентација. Ова е многу едноставна конструкција.

Тврдењето дека постојат бесконечно многу маркантни полни квадрати само по себе (без конструкција и без доказ) се вреднува со **0 поени**.

Доказ со контрадикција: Да претпоставиме дека постојат само конечно многу маркантни полни квадрати. Нека $m^2=a_1a_2\dots a_{k-1}$ е најголемиот таков број, и нека тој има точно $k-1$ цифри во бинарната репрезентација. **(1 поен)**

Го разгледуваме $s=m\cdot(2^k+1)$. Така

$$s^2=m^2(2^{2k}+2^{k+1}+1)=a_1a_2\dots a_{k-1}a_1a_2\dots a_{k-1}00a_1a_2\dots a_{k-1}.$$

Да забележиме дека s^2 е маркантен, што е посакуваната противречност. Имено, постојат барем $\frac{k}{2}$ единици меѓу цифрите a_i, што повлекува дека постојат барем $\frac{3k}{2}$ единици меѓу вкупно $(3k-1)$ бинарни цифри на s^2. **(5 поени)** Бројот 1 потврдува дека множеството маркантни полни квадрати е непразно. **(1 поен)** $\square$

Забелешка: Последниот поен се доделува само за комплетно решение со контрадикција.