# Трет Меморијален Математички Натпревар

# Александар Блажевски - Цане

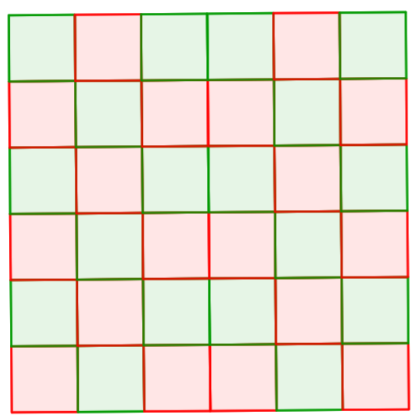
Ден 1: Категорија СЕНИОРИ

## РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

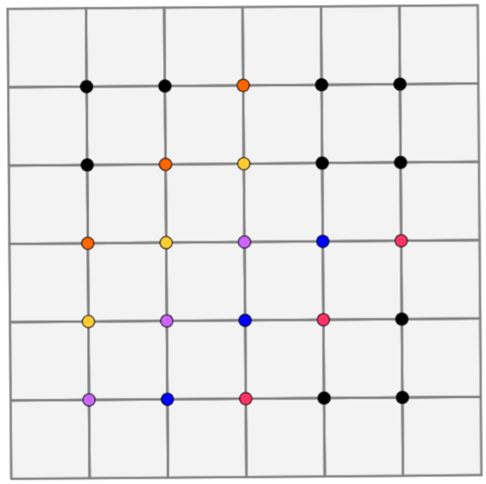
**Задача 1.** Дадена е $6 \times 6$ табла на која секое единечно квадратче е обоено во црвена или зелена боја. Притоа нема 4 еднаквообени единечни квадратчиња кои се соседни по хоризонтална, вертикална или дијагонална линија. За $2 \times 2$ квадрат на таблата велиме дека е *шаховски* доколку има една црвена и една зелена дијагонала. Одредете го најголемиот можен број на шаховски квадрати.

**Решение.** Одговор: 20.

Најпрво ќе покажеме дека 20 е достижен. Доколку ја обоиме таблата како што е прикажано на сликата подолу, добиваме точно 20 *шаховски* квадрати при што не постојат 4 еднаквообоени единечни квадрати што се соседни по хоризонтала, вертикала или дијагонала. **(3 поени)**



Да забележиме дека секој $2 \times 2$ квадрат може да се идентификува на единствен начин според неговиот центар. Поради тоа, ќе се фокусираме на $5 \times 5$ мрежата од сите возможни центри прикажана на сликата подолу.



Да ја обоиме $5 \times 5$ мрежата како што е прикажано на претходната слика.

Ако некои три соседни центри (кои одговараат на *шаховските* квадрати) се наоѓаат на иста дијагонала во $5 \times 5$ мрежата, тоа би значело дека постојат 4 соседни единечни квадрати во иста боја кои што се во иста дијагонала, што не е можно.
Поради ова, може да постојат најмногу по 2 портокалови, жолти, виолетови, сини и розеви центри кои што соодветствуваат на $5 \cdot 2 = 10$ *шаховски* квадрати. Заедно со останатите 10 црно обоени точки добиваме најмногу $10 + 5 \cdot 2 = 20$ *шаховски* квадрати. **(4 поени)** □

**Забелешки.** За доделувањето парцијални поени важи следното:

(1) Не се доделуваат парцијални поени за првиот дел (доказ дека може да се добијат 20 шаховски квадрати).

(2) Парцијални поени за вториот дел (доказ дека не може да се добијат повеќе од 20 шаховски квадрати) се доделуваат во следниве ситуации:

  (а) Добиена е нетривијална горна граница за бројот на шаховски квадрати. **(1 поен)**

  (б) Разгледувана е $5 \times 5$ мрежата од центри. **(2 поени)**

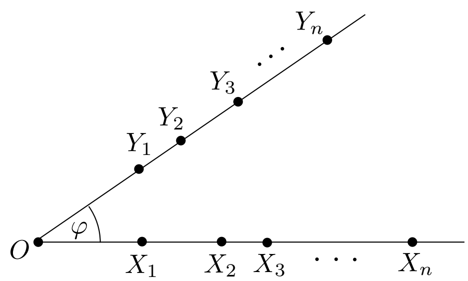
(3) Првиот и вториот дел се вреднуваат независно еден од друг. Секоја точна конструкција при која има 20 шаховски квадрати вреди **3 поени**, и секој точен доказ дека 20 е горна граница вреди **4 поени**.

(4) Доколку вториот дел не е комплетен, можните парцијални поени НЕ се адитивни. Натпреварувачот може да добие најмногу 2 парцијални поени за овој дел.

**Задача 2.** За даден цел број $n \geq 2$, нека $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ и $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ се позитивни реални броеви. Докажете дека за секоја вредност $C \in (-2, 2)$ (земајќи $y_{n+1} = y_1$) важи

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 + Cx_iy_i + y_i^2} < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 + Cx_iy_{i+1} + y_{i+1}^2}\,.$$

**Решение.** Постои $\varphi \in (0, \pi)$ таков што $C = -2\cos\varphi$. Разгледуваме агол со големина $\varphi$ (радијани) и теме во точка $O$. На едниот крак од аголот избираме точки $X_1, X_2, \ldots, X_n$ за кои важи $OX_i = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и слично на другиот крак избираме точки $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ со $OY_i = y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. **(2 поени)**

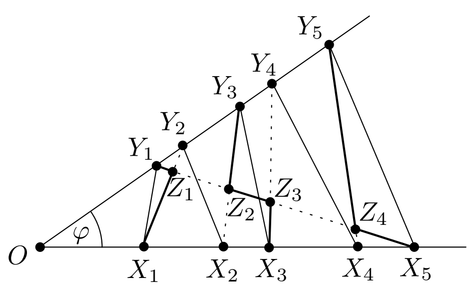



Посакуваното неравенство добива облик:

$$\sum_{i=1}^{n} X_iY_i < \sum_{i=1}^{n} X_iY_{i+1}\,.$$

**(1 поен)**

Да се потсетиме дека најкратко растојание меѓу две точки $X$ и $Y$ во Евклидова рамнина е точно должината на отсечката $XY$. **(1 поен)** Нека $Z_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ се пресечните точки на $X_iY_{i+1}$ и $X_nY_1$ (случајот $n = 5$ е прикажан на долната слика). **(1 поен)**




Тогаш

$$\begin{array}{rcl}
X_1Y_1 & < & X_1Z_1 + Z_1Y_1 \\
X_2Y_2 & < & X_2Z_2 + Z_1Z_2 + Z_1Y_2 \\
X_3Y_3 & < & X_3Z_3 + Z_2Z_3 + Z_2Y_3 \\
\cdots & & \\
X_nY_n & < & X_nZ_{n-1} + Z_{n-1}Y_n
\end{array}$$

и едноставно ги собираме соодветните страни на овие $n$ неравенства. **(2 поени)** $\square$

**Задача 3.** Најдете ги сите тројки $(x, y, z)$ од позитивни цели броеви такви што

$$x^2 + y^2 + x + y + z = xyz + 1\,.$$

**Решение.** Нека тројката $(x, y, z)$ е едно решение на равенката. Дефинираме $t = xz - y - 1$. Од

$$t(xz - 1) = t(t + y) = t^2 + xyz - y^2 - y = t^2 + x^2 + x + z - 1 > 0,$$

и $xz - 1 \geq 0$, заклучуваме дека $t > 0$. Да забележиме дека притоа

$$\begin{aligned} x^2 + t^2 + x + t + z - xtz - 1 &= t(t - xz + 1) + x^2 + x + z - 1 \\ &= -yt + x^2 + x + z - 1 \\ &= x^2 + y^2 + x + y + z - xyz - 1 = 0. \end{aligned}$$

Значи $(x, t, z) = (x, xz - y - 1, z)$ е исто така решение на равенката. **(2 поени)**

Поради симетрија, и тројката $(yz - x - 1, y, z)$ е решение. Следствено, ако $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ е низата дефинирана со

$$(a_0, a_1) = (x, y),\ \text{и}\ a_{n+2} + a_n = za_{n+1} - 1\ ,\ \text{за секој}\ n \in \mathbb{Z},$$

тогаш $(a_i, a_{i+1}, z)$ и $(a_{i+1}, a_i, z)$ се решенија за секој $i \in \mathbb{Z}$. **(1 поен)**

Бидејќи $a_i > 0$ за секој $i \in \mathbb{Z}$, постои индекс $j$ за кој $a_j$ е најмалиот член на низата $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ќе означуваме

$$(a_{j-1}, a_j, a_{j+1}) = (Y, X, T),$$

со тоа што $Y, T \geq X$. Ако притоа $Y = X$ тогаш $2X^2 + 2X + z = X^2z + 1$, што повлекува дека $(X + 1)(2X - Xz + z) = 1$. Но последното е невозможно бидејќи $X + 1 > 1$. Значи $Y > X$. Аналогно $T > X$. Имаме

$$(X + 1)^2 + z - X - 2 = X^2 + X + z - 1 = YT \geq (X + 1)^2,$$

што повлекува дека $z \geq X + 2$. Тогаш

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 + X + Y &= z(XY - 1) + 1 \\ &\geq X^2Y + 2XY - X - 1 \\ &\geq X^2Y + 2X(X + 1) - X - 1 \\ &= X^2Y + 2X^2 + X - 1, \end{aligned}$$

и оттука $Y^2 \geq (X^2 - 1)(Y + 1)$. Имајќи предвид дека $Y + 1 > Y$, добиваме дека $Y > X^2 - 1$ (дури и кога $X^2 - 1 = 0$ бидејќи во тој случај неравенството $Y > X^2 - 1 = 0$ важи затоа што $Y$ е позитивен). Следствено $Y \geq X^2$. Аналогно $T \geq X^2$. Оттука

$$YT = X^2 + X + z - 1 \implies XYT = X^3 + X^2 + Xz - X = X^3 + X^2 - X + Y + T + 1.$$

Имајќи предвид дека $XT - 1 \geq 0$, добиваме

$$X^3 + X^2 - X + T + 1 = (XT - 1)Y \geq (XT - 1)X^2.$$

Бидејќи $X^3 - 1 \geq 0$, следува

$$X^3 + X^2 - X + 1 \geq (XT - 1)X^2 - T = (X^3 - 1)T - X^2 \geq (X^3 - 1)X^2 - X^2.$$

Последното равенство може да се запише и во облик

$$X^3 + 3X^2 + 1 \geq X^5 + X.$$

Ако $X \geq 2$ тогаш $X^3 \leq \frac{1}{4}X^5$ и $3X^2 \leq \frac{3}{8}X^5$ и $1 < X$, што повлекува

$$X^5 + X \leq X^3 + 3X^2 + 1 < \frac{5}{8}X^5 + X,$$

противречност! Затоа $X = 1$. **(3 поени)**

Оттука

$$YT = X^2 + X + z - 1 = z + 1 = Xz + 1 = Y + T + 2,$$

односно $(Y-1)(T-1) = 3$, што води до заклучокот дека $\{Y, T\} = \{2, 4\}$ и $z = 7$. Значи за низата $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ има две можности: или е тоа низата $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ дефинирана со

$$(b_0, b_1) = (1, 2), \text{ и } b_{n+2} + b_n = 7b_{n+1} - 1 \text{ , за секој } n \in \mathbb{Z},$$

или пак е тоа низата $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ дефинирана со

$$(c_0, c_1) = (1, 4), \text{ и } c_{n+2} + c_n = 7c_{n+1} - 1 \text{ , за секој } n \in \mathbb{Z},$$

што всушност задоволува $c_n = b_{-n}$, за секој $n \in \mathbb{Z}$. Заклучуваме дека сите решенија се $(b_i, b_{i+1}, 7)$ и $(b_{i+1}, b_i, 7)$, за секој $i \in \mathbb{Z}$, каде

$$b_n = \frac{(6+\sqrt{5})(\frac{7}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5})^n + (6-\sqrt{5})(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5})^n + 3}{15} \in \mathbb{Z} \text{ , за секој } n \in \mathbb{Z}.$$

**(1 поен)**

□