

Среда, Септември 8, 2021

Задача 1. Даден е триаголник ABC таков што $AB < AC$. Нека ω е кружница што минува низ B, C така што A е во внатрешноста на ω . Нека X, Y се точки од ω такви што $\angle BXA = \angle AYC$. Притоа, X и C се на различни страни од правата AB , а Y и B се на различни страни од правата AC .

Докажи дека правата XY минува низ фиксна точка додека X, Y се движат на ω .

Задача 2. Најди ги сите функции $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ такви што

$$f(x + f(x) + f(y)) = 2f(x) + y$$

важи за сите $x, y \in (0, +\infty)$.

Задача 3. Нека a, b и c се позитивни цели броеви кои што ја задоволуваат равенката

$$(a, b) + [a, b] = 2021^c.$$

Ако $|a - b|$ е прост број, докажи дека бројот $(a + b)^2 + 4$ е сложен.

Со (a, b) е означен најголем заеднички делител на a и b , а со $[a, b]$ е означен најмал заеднички содржател на a и b .

Задача 4. Ангел има складиште, кое што на почетокот содржи 100 купчиња со по 100 отпадоци. Секое утро, Ангел извршува точно еден од следниве чекори:

- (a) Ги чисти сите отпадоци од едно купче.
- (b) Чисти по еден отпадок од секое купче.

Меѓутоа, секоја вечер, демон влегува во складиштето и извршува точно еден од следниве чекори:

- (a) На секое непразно купче додава по еден отпадок.
- (b) Формира ново купче со точно еден отпадок.

Кое е првото утро за кое Ангел може да обезбеди да ги исчисти сите отпадоци од складиштето?