



ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА БМО 2021

Среда, 18. Август 2021

Задача 1. Даден е остроаголен триаголник ABC . Нека D , E и F се подножјата на висините спуштени од A , B и C , соодветно, а H е ортоцентарот на $\triangle ABC$. Нека X е произволна точка од опишаната кружница на $\triangle DEF$. Опишаните кружници на $\triangle EHX$ и $\triangle FHX$ по втор пат ги сечат правите CF и BE во точките Y и Z , соодветно. Докажете дека правата YZ ја преполовува отсечката BC .

Задача 2. Низа е дефинирана со $x_0 = 1$ и за секој $n \geq 0$, $x_{2n+1} = x_n$ и $x_{2n+2} = x_n + x_{n+1}$. Докажете дека за секои заемно прости позитивни цели броеви a и b , постои ненегативен цел број n таков што $a = x_n$ и $b = x_{n+1}$.

Задача 3. Дадени се ненегативни реални броеви $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ такви што $\sum_{k=1}^{2021} a_k = 1$. Докажете дека

$$\sum_{k=1}^{2021} \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k} \leq 3.$$

Задача 4. Виктор и Наталија играат една игра во која наизменично бојат коцка. Боењето го започнува Виктор, и при секој негов потег тој избира необоен раб од коцката и го бои во виолетова боја. При секој нејзин потег, Наталија избира необоен раб или, најмногу еднаш во текот на играта, избира дијагонала од некој сид на коцката и го/ја бои во неон зелена боја. Ако играчот кој е на ред нема дозволен потег на располагање, тогаш редот преминува на другиот играч. Играта завршува кога повеќе нема дозволени потези за ниту еден од играчите.

Во оваа игра победува Наталија доколку на крајот за секои две темиња е можно од едното да се стигне до другото движејќи се само по неон зелени отсечки (рабови или дијагонала), а во спротивно победник е Виктор.

Кој од играчите има победничка стратегија? (Образложете го одговорот.)

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 10 поени.