ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА ИМО 2021

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

1. Нека $k \in \mathbb{N}$ задоволува $2 \leq k \leq 2020$. Нека $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ е монотоно опаѓачка низа од ненегативни реални броеви така што

$$\sum_{i=n}^{2021} a_i \leq k a_n$$

за секој $n = 1, 2, \ldots 2021$. Докажете дека $a_{2021} \leq 4(1 - \frac{1}{k})^{2021} a_1$.

Решение. Нека $m = 2021 - k$. За $i = m+1, m+2, \ldots, 2021$ имаме (поради монотоноста) $a_i \geq a_{2021}$. Користејќи го ова и неравенството $ka_m \geq \sum_{i=m}^{2021} a_i$ добиваме

$$a_m \geq \frac{2021-m}{k-1} a_{2021} = \frac{k}{k-1} a_{2021}. \qquad \textbf{(2п)}$$

Забелешка: Ако е добиено неравенството $a_n \geq \frac{2021-n}{k-1} a_{2021}$ *без да се издвои специјалниот случај* $n = 2021 - k$ *тогаш се доделува само* **(1п)**.

Размислувајќи аналогно и користејќи дека $ka_{m-1} \geq \sum_{i=m-1}^{2021} a_i$, добиваме

$$(k-1)a_{m-1} \geq \sum_{i=m}^{2021} a_i = a_m + \sum_{i=m+1}^{2021} a_i \geq \frac{k}{k-1} a_{2021} + (2021-m) a_{2021} = \frac{k^2}{k-1} a_{2021}. \qquad \textbf{(1п)}$$

Со продолжување на оваа постапка (или со индукција) заклучуваме дека за $0 \leq n < m$

$$a_{m-n} \geq \left(\frac{k}{k-1}\right)^{n+1} a_{2021}. \qquad \textbf{(2п)}$$

Земајќи $n = m - 1 = 2020 - k$, едноставни пресметки даваат дека

$$a_{2021} \leq \frac{(1-\frac{1}{k})^{2021}}{(1-\frac{1}{k})^k} a_1. \qquad \textbf{(1п)}$$

Конечно, бидејќи именителот е растечка функција од аргумент $k \geq 2$ (ова може да се докаже едноставно со помош на неравенството помеѓу аритметичка и геометриска средина), го добиваме посакуваното неравенство

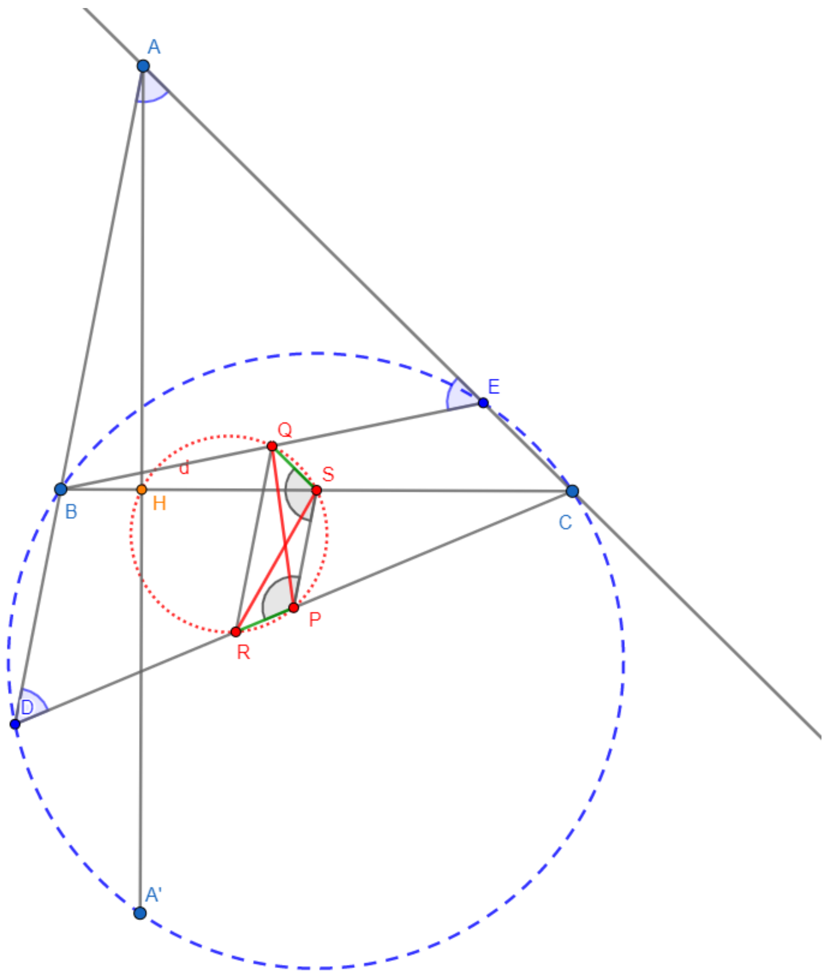
$$a_{2021} \leq 4(1 - \frac{1}{k})^{2021} a_1. \qquad \textbf{(1п)}$$

□

2. Нека ABC е остроаголен триаголник таков што $AB < AC$. Нека A' е слика на A при осна симетрија во однос на BC. Опишаната кружница на $\triangle A'BC$ ги сече полуправите AB и AC по втор пат во точки D и E соодветно, така што B е помеѓу A и D, а E е помеѓу A и C. Да ги означиме со P, Q и S средишните точки на отсечките CD, BE и BC, соодветно. Докажете дека правите BC и AA' се сечат на опишаната кружница на $\triangle PQS$.

Решение. Ќе дадеме две независни решенија.

Прво решение. Нека k е опишаната кружница на $\triangle PQS$. Да ја означиме со R другата пресечна точка на k и CD. Тогаш важи $\angle PRS = \angle PQS$. Правата PS е средна линија во триаголникот BCD, и оттука $PS \parallel BD$. Слично, QS е средна линија во $\triangle CBE$, па важи $QS \parallel CE$ и $QS = \frac{1}{2} \cdot CE$. Имаме дека $\angle BDC = \angle BA'C = \angle BAC$ (ова следува од симетрија и од фактот дека четириаголникот $BDA'C$ е тетивен). Оттука, $CD = CA$. **(1п)** Важат и равенствата $\angle RPS = 180° - \angle CPS = 180° - \angle CDB = 180° - \angle BAC$. Од $QS \parallel AC$, $PS \parallel AB$ и од распоредот на точките, заклучуваме дека $\angle PSQ = 180° - \angle BAC$. Оттука, равенствата $\angle RPS = \angle QSP$, $\angle PRS = \angle PQS$ и $PS = PS$ кажуваат дека триаголниците PRS и SQP се складни. Следствено, $PR = SQ = \frac{1}{2} \cdot CE$. **(2п)** Да забележиме и дека $AB = BE$ (бидејќи $\angle BAE = \angle BA'C = \angle BDC = \angle BEA$, што следува од симетрија и фактот дека $BDA'CE$ е тетивен петаголник). Нека H е пресекот на BC и AA'.



Ќе докажеме дека $\overline{CS} \cdot \overline{CH} = \overline{CP} \cdot \overline{CR}$, од што (како последица на повратната насока на теоремата за степен на точка, или поедноставно од сличност) ќе можеме да заклучиме дека H лежи на посакуваната кружница. **(1п)** Најпрво да ги воочиме следните пресметки:

$$\overline{CP} \cdot \overline{CR} = \overline{CP} \cdot (\overline{CP} + \overline{PR}) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot (\frac{1}{2} \cdot CD + \frac{1}{2} \cdot CE)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \overline{AC} \cdot (\overline{AC} + \overline{EC})$$

Воведуваме ознаки: $AB = c, BC = a, CA = b$ и $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Користејќи дека $AB = BE$, добиваме $AE = 2c\cos\alpha$. Оттука,

$$\overline{CP} \cdot \overline{CR} = \frac{b(b + b - 2c\cos\alpha)}{4} = \frac{b(b - c\cos\alpha)}{2}. \ \textbf{(2п)}$$

Лесно се добива дека $CH = b\cos\gamma$ и $CS = \frac{a}{2}$. Сега имаме:

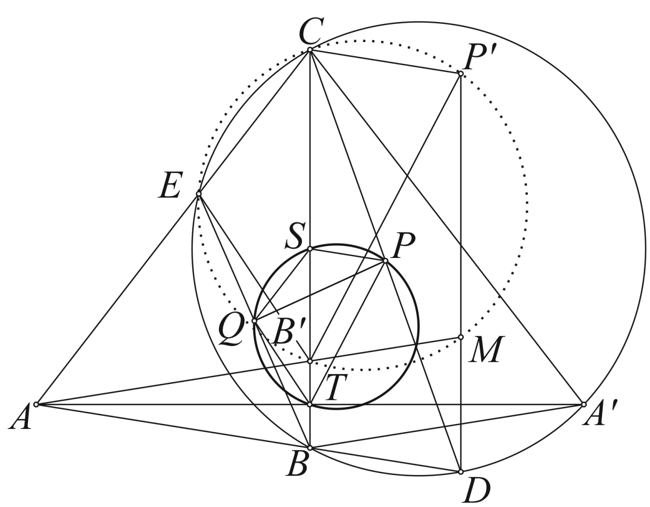
$$\overline{CS} \cdot \overline{CH} = \overline{CP} \cdot \overline{CR} \iff \frac{ab\cos\gamma}{2} = \frac{b(b - c\cos\alpha)}{2}$$

$$\iff a\cos\gamma = b - c\cos\alpha \iff a\cos\gamma + c\cos\alpha = b.$$

Последното е точно според законот за проекција. **(1п)**

Забелешка: Доказот дека $CD = CA$ или $AB = BE$ носи 1 поен дури и во случај кога и двете равенства се докажани. Обидот да се дојде до решение така што ќе се докаже дека $\overline{CS} \cdot \overline{CH} = \overline{CP} \cdot \overline{CR}$ носи 1 дополнителен поен. ◇

Второ решение. Нека T е точката во која се сечат правите AA' и BC, точките B' и P' се такви што $\overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BT}$ и $\overrightarrow{BP'} = 2\overrightarrow{BP}$, **(1п)** и M е точка на полуправата AB' таква што $AM = AD$. **(1п)**



За степенот на точката A во однос на $(BECD)$ имаме $\overline{AE} \cdot \overline{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB'} \cdot \overline{AM}$, па четириаголникот $B'MCE$ е тетивен. **(1п)** Бидејќи $\overrightarrow{CP'} = 2\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{BD}$, четириаголникот $BDP'C$ е паралелограм **(1п)**. Од тоа што $BDMB'$ е рамнокрак трапез, заклучуваме дека $CP'MB'$ е исто така рамнокрак, што повлекува дека P' лежи на опишаната кружница на $B'MCE$ ($\angle CB'M + \angle CP'M = \angle CB'M + \angle B'MP' = 180°$). **(1п)**

Нека $\chi_{B,2}$ е хомотетија со центар B и коефициент 2. Имаме дека $\chi_{B,2}(TPSQ) = B'P'CE$, па заклучуваме дека T е на кружницата опишана околу $\triangle PSQ$. **(2п)** ◇ □

3. За група луѓе велиме дека е *добра* доколку секој член има парен број (вклучително нула) познаници во групата (познанствата се обострани). Докажете дека секоја група луѓе може да се разбие на два добри дела (дозволено е некој од деловите да биде празен).

Решение. Вршиме индукција по бројот n на членови во групата. Индуктивната основа $n = 1$ е тривијално исполнета. Нека G е група од $n \geq 2$ луѓе. Можеме да претпоставиме дека G

не е добра (во спротивно, разбивањето $\{G, \emptyset\}$ задоволува). Нека Z е член за кој множеството P од негови познаници во групата е непарно. (За конечно множество велиме дека е *непарно* (одн., *парно*) доколку има непарен (одн., парен) број на елементи.) Да ја разгледаме групата G' добиена од $G - \{Z\}$ со заменување на релацијата 'познанство' со 'непознанство' во P. (Со други зборови, секоја двојка познаници на Z во G се непознаници во G' и обратно.) **(3п)**

Според индуктивната претпоставка, постои 'добро' разбивање $\{X', Y'\}$ на G'. Точно едно од множествата $A \cap X'$ и $A \cap Y'$ е парно, нека такво е првото. **(1п)**

Забележуваме дека, бидејќи $A \cap Y'$ е непарно, групата Y' е добра и со почетната релација 'познанство'. **(1п)**

Од друга страна, со почетната релација 'познанство', групата X' не е добра: имено, нејзините 'лоши членови' го сочинуваат точно $A \cap X'$. **(1п)**

Но, тоа значи дека групата $X' \cup \{Z\}$ е добра, што го комплетира индуктивниот доказ. **(1п)**

Забелешка: Не се доделуваат поени доколку е само кажано: да претпоставиме дека групата не е добра, и да разгледаме нејзин член кој има непарен број познаници. $\square$

4. Нека $S = \{1, 2, 3, \ldots 2021\}$ и $f : S \to S$ е пресликување такво што $f^{(n)}(n) = n$ за секој $n \in S$. Одредете ги сите можни вредности на $f(2021)$.
(Тука, $f^{(n)}(n) = \underbrace{f(f(f \ldots f(}_{n \text{ пати}}n))) \ldots)).$)

Решение. Да забележиме дека f е сурјекција: имено, ако за произволен $n \in S$ земеме $m = f^{(n-1)}(n)$ тогаш $f(m) = n$. **(1п)** Со оглед на тоа дека множеството S е конечно, сурјективноста повлекува дека f е биекција (пермутација на S), што значи дека може да се разбие на циклуси. За секој $k \in S$, нека C_k е циклусот во кој е содржан k. Тогаш $f^{(r)}(k) \in C_k$ за секој $r > 0$. **(1п)** Притоа, $f^{(r)}(k) = k$ ако и само ако r е делив со $|C_k|$ (бројот на елементи на циклусот C_k). Означувајќи $|C_k| = c_k$, имаме дека $c_{2021} \mid 2021$. Факторизација $2021 = 1 \cdot 43 \cdot 47$ отвора 4 можности: **(3п)**
I) : $c_{2021} = 1$, односно $f(2021) = 2021$. Оваа можност се реализира, на пример, со идентичната функција $f(n) = n$ за секој $n \in S$.
II) : $c_{2021} = 43$, односно C_{2021} има 43 елементи, и сите се содржатели на 43. Со оглед на тоа дека постојат вакви 43-елементни помножества S_0 од S во кои елемент е 2021, лесно заклучуваме дека $f(2021)$ може да биде било кој елемент од S што е делив со 43. Имено, доволно е да дефинираме $f(n) = n$ за секој $n \in S \backslash S_0$, и да користиме соодветна циклична пермутација на некое S_0.
III) : $c_{2021} = 47$, односно C_{2021} има 47 елементи, и сите се содржатели на 47. Но ова е невозможно, бидејќи $47^2 > 2021$.
IV) : $c_{2021} = 2021$, односно пермутацијата има единствен циклус од големина 2021. Ова е повторно невозможно, бидејќи тогаш е потребно секој број од S да е делив со 2021. **(2п)**

Да сумираме, $f(2021)$ може да биде било кој елемент од S што е делив со 43. $\square$

5. Најдете ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што за секои $a, b \in \mathbb{N}$ се исполнети следните услови:

(i) $f(f(a) + b) \mid b^a - 1$;
(ii) $f(f(a)) \geq f(a) - 1$.

Решение. Нека $f(1) = s$. Од (i) имаме $f(s + 2) = f(f(1) + 2) \mid 2^1 - 1$; значи $f(s + 2) = 1$. Најпрво ќе покажеме дека $f(k) \neq 2$ за секој $k > 2$. Претпоставувајќи го спротивното, нека таков број k постои. Во случај k да е парен број, ставајќи $k = 2u$, според условот (i), добиваме $2 = f(2u) = f(f(2u) + 2u - 2) \mid (2u - 2)^{2u} - 1$; но, ова е очигледно невозможно.

Слично, доколку претпоставениот k е непарен, ставајќи $k = 2u+1$, повторно од (i), имаме $2 = f(2u+1) = f(f(s+2)+2u) \mid (2u)^{s+2}-1$, што е истата противречност. **(1п)**
Бидејќи $f(s+3) = f(f(1)+3) \mid 3^1 - 1 = 2$ и $s+3 > 2$, следува дека $f(s+3) = 1$. Да ги искористиме изведените равенства $f(s+2) = 1 = f(s+3)$: од (i),

$$f(k) = f(f(s+2)+k-1) = f(f(s+3)+k-1) \mid \text{НЗД}((k-1)^{s+2}-1, (k-1)^{s+3}-1)\,;$$

но, користејќи дека $((k-1)^{s+3}-1) - (k-1)((k-1)^{s+2}-1) = k-2$, добиваме

$$f(k) \mid k-2 \quad \text{за секој} \quad k \geq 2\,. \quad \textbf{(2п)}$$

Следствено, за секој $k \geq 3$ важи $f(k) \leq k-2$. Последното неравенство, во комбинација со (ii), повлекува дека $Im(f)$, множеството слики на f, е содржано во $\{1,2\}$. Навистина, доколку претпоставиме дека постои $k \geq 1$ за кој $f(k) \geq 3$, ги добиваме противречните неравенства $f(k)-1 \leq f(f(k)) \leq f(k)-2$.

За момент да сумираме, досега имаме заклучено дека

$$(1) \qquad Im(f) \subseteq \{1,2\} \quad \text{и} \quad f^{-1}(2) \subseteq \{1,2\}\,. \quad \textbf{(2п)}$$

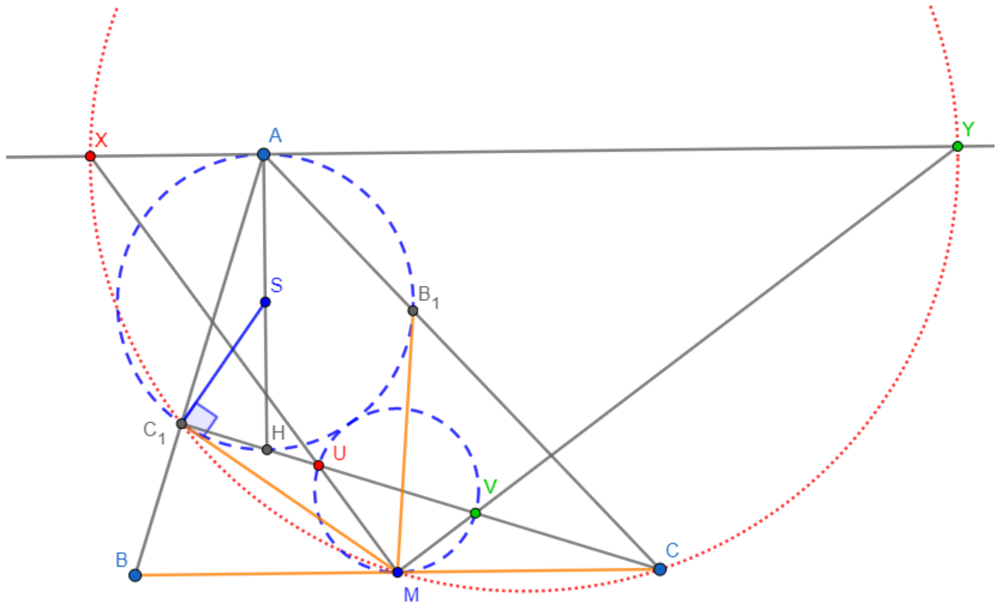
Нека $f(2) = t$. Од (1) имаме $s, t \in \{1,2\}$. Со други зборови, постојат четири функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ за кои (1) е исполнето. За секоја таква f, условот (ii) е секако исполнет. Ова важи и за условот (i). Имено, ако $b = 1$ тогаш било кој a задоволува; ако пак $b > 1$ тогаш $f(a)+b \geq 3$, што повлекува $f(f(a)+b) = 1$. **(1п)**

Значи, постојат точно четири функции кои ги исполнуваат условите на задачата. Да ги нумерираме со f_1, f_2, f_3 и f_4 согласно следното: $f_1 \equiv 1$; $f_2(1) = f_2(2) = 2$ и $f_2(n) = 1$ за секој $n > 2$; $f_3(2) = 2$ и $f_3(n) = 1$ за секој $n \neq 2$; $f_4(1) = 2$ и $f_4(n) = 1$ за секој $n \neq 1$. **(1п)** $\square$

6. Нека H е ортоцентарот на остроаголен триаголник ABC таков што $AB < AC$. Висините BH и CH ги сечат AC и AB во B_1 и C_1, соодветно. Нека M е средишна точка на BC. Нека l е права паралелна со BC која поминува низ A. Опишаната кружница на $\triangle CMC_1$ ја сече l во X и Y, така што X е на истата страна од AH како и B, додека Y е на истата страна од AH како и C. Правите MX и MY ја сечат CC_1 во U и V, соодветно. Докажете дека опишаните кружници на $\triangle MUV$ и $\triangle B_1C_1H$ се допираат.

Решение. Ќе дадеме две независни решенија.

Прво решение. Да забележиме дека B_1 и C_1 се на кружницата со дијаметар BC и центар M. Да ја означиме оваа кружница со k. Нека Φ е инверзија во однос на k. **(1п)** Тогаш очигледно важи $\Phi(B) = B$, $\Phi(C_1) = C_1$, $\Phi(B_1) = B_1$ и $\Phi(C) = C$ бидејќи $MB = MC = MB_1 = MC_1$. Нека ω е опишананата кружница на $\triangle CMC_1$. Ќе докажеме дека слика од правата CC_1 е кружницата $\Phi(CC_1) = \omega$. Навистина, $\Phi(CC_1)$ е кружница што минува низ M, и притоа $\Phi(C) = C$ и $\Phi(C_1) = C_1$, што е токму ω. **(1п)** Јасно, правите MU и MV остануваат неподвижни (како целини), па сликите $\Phi(U)$ и $\Phi(V)$ се пресечни точки на MU и MV со $\Phi(CC_1) = \omega$, соодветно. Имаме дека $\Phi(U) = X$ и $\Phi(V) = Y$. Тоа значи дека $\Phi((MUV))$ е права која поминува низ $\Phi(U) = X$ и $\Phi(V) = Y$, а тоа е токму l. Следствено, имајќи предвид дека секоја инверзија е инволуција, $\Phi(l)$ е опишаната кружница на триаголникот MUV. **(1п)**



Сега ќе докажеме дека опишаната кружница на $\triangle B_1C_1H$ е неподвижна (како целина) при Φ. За таа цел, нека S е средишна точка на AH. Тогаш, опишаната кружница на $\triangle B_1C_1H$ има дијаметар AH и центар S. Едноставна пресметка со аглите ни дава $SC_1 \perp MC_1$:

$$\angle MC_1S = \angle MC_1C + \angle HC_1S = (90^\circ - \angle ABC) + \angle ABC = 90^\circ.$$

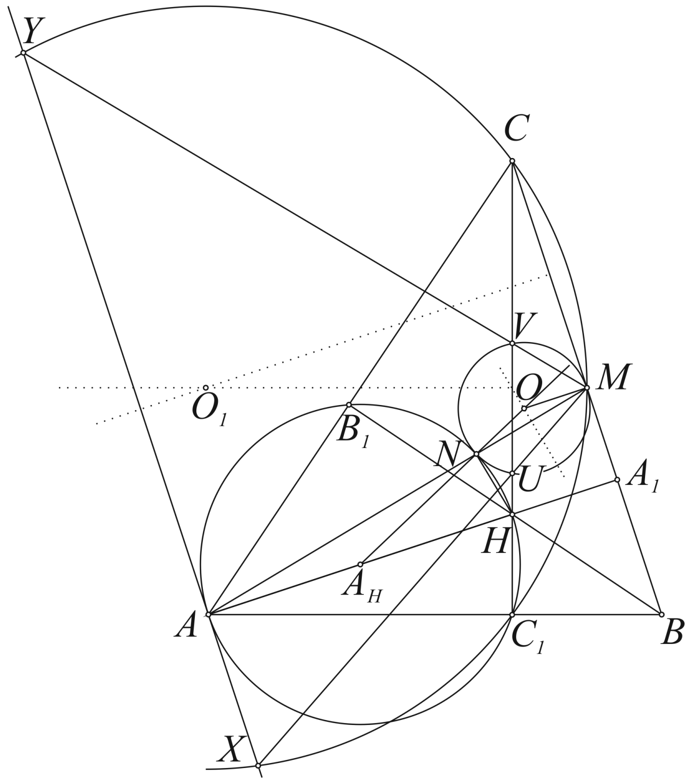
Во пресметката користевме дека $MC = MC_1$ и $SA = SC_1$. Оттука, k е ортогонална на кружницата со дијаметар AH, па инверзијата во однос на k ја остава неподвижна (како целина) опишаната кружница на $\triangle B_1C_1H$. **(3п)** Останува да забележиме дека l е тангента на (B_1C_1H), па нивните слики при Φ, кои што се опишаните кружници на $\triangle MUV$ и $\triangle B_1C_1H$, исто така се допираат. **(1п)**

Забелешка: Разгледувањето на инверзија во однос на k носи 1 поен. ◇

Второ решение. Нека O' и O_1 се центри на опишаните кружници на триаголниците MUV и XMY. Најпрво ќе докажеме дека $\triangle XYM$ и $\triangle VUM$ се слични. Имаме $\angle XMY = \angle YMX = \angle VMU$ и $\angle XYM = \angle XYC - \angle MYC = \angle AXM - \angle CC_1M = \angle XMB - \angle C_1CM = \angle MUV$. **(1п)** Оттука, $\angle XMO' = \angle YMO_1 = 90^\circ - \angle MXY$, па важи $MO' \perp XY$ и $MO' \perp BC$. Бидејќи растојанијата од M до UV и XY се $\frac{BC_1}{2}$ и AA_1 соодветно, коефициентот на сличност е $\frac{BC_1}{2AA_1}$, па добиваме:

$$\frac{MO'}{MO_1} = \frac{BC_1}{2AA_1}. \text{ } \mathbf{(1п)}$$

Нека A_H е средишна точка на AH, која е центар на опишаната кружница на триаголникот $\triangle AB_1C_1$ (бидејќи $\angle AB_1H = \angle AC_1H = 90^\circ$). Оваа кружница исто така поминува низ H. Нека N и O се пресечни точки на AM со опишаната кружница на $\triangle AB_1C_1$ и со MO', соодветно.



Од $AH \perp BC$ и $MO \equiv MO' \perp BC$, имаме $\angle NMO = \angle NAA_H = \angle ANA_H = \angle ONM = \phi$. Од сличноста $\triangle MNO \sim \triangle ANA_H$, заклучуваме

$$\frac{OM}{AA_H} = \frac{MN}{AN}.$$

Користејќи дека $\triangle ANH \sim \triangle AA_1M$, добиваме

$$\frac{AN}{AH} = \frac{AA_1}{AM},$$

а потоа и

$$\frac{OM}{AA_H} = \frac{MN}{AA_1} \cdot \frac{AM}{AH}. \quad \textbf{(1п)}$$

Бидејќи $\angle A_HC_1M = 90^\circ - \angle AC_1A_H + \angle CC_1M = 90^\circ$, правата MC_1 е тангента на $k(A_H, A_HA)$, па за степенот на точката M добиваме $AM \cdot MN = MC_1 \cdot MC_1$. **(1п)**

Сега го имаме следното:

$$\frac{MO}{O_1M} = \frac{MO}{AA_H} \cdot \frac{AA_H}{O_1M} = \frac{MC_1 \cdot MC_1}{AA_1 \cdot AH} \cdot \frac{AH/2}{a/(4\cos\beta)} = \frac{a\cos\beta}{2AA_1} \cdot \frac{a^2/4}{a^2/4} = \frac{BC_1}{2AA_1} = \frac{MO'}{O_1M}$$

што значи дека $MO = MO'$, па $O \equiv O'$. **(2п)**

Конечно, O, N и A_H се колинеарни па дадените кружници се допираат во N. **(1п)** $\diamond$ $\square$