XLVI ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА

ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ
СКОПЈЕ, 15-16.V.2021

9– одделение – КЛУЧ

1. Докажи дека $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)} > \frac{674}{1011}$.

Решение 1: Користејќи ги идентитетите $x^3 \pm 1 = (x \pm 1)(x^2 \mp x + 1)$ **(5Б)** имаме:

$$(1) \qquad \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)\cdots(2021^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)\cdots(2021^3+1)} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdots2020}{3\cdot4\cdot5\cdots2022}\cdot\frac{(2^2+2+1)\cdot(3^2+3+1)\cdot(4^2+4+1)\cdots(2021^2+2021+1)}{(2^2-2+1)\cdot(3^2-3+1)\cdot(4^2-4+1)\cdots(2021^2-2021+1)}. \qquad \textbf{(5Б)}$$

За првата од двете дропки на десната страна од добиеното равенство (1), со кратење, добиваме:

$$\frac{1\cdot2\cdot3\cdots2020}{3\cdot4\cdot5\cdots2022} = \frac{2}{2021\cdot2022} = \frac{1}{2021\cdot1011}. \qquad \textbf{(5Б)}$$

За да ја пресметаме втората дропка на десната страна на (1), да го забележиме идентитетот:

$$x^2 + x + 1 = (x+1)^2 - (x+1) + 1. \qquad \textbf{(5Б)}$$

Следствено,

$$\frac{(2^2+2+1)\cdot(3^2+3+1)\cdot(4^2+4+1)\cdots(2021^2+2021+1)}{(2^2-2+1)\cdot(3^2-3+1)\cdot(4^2-4+1)\cdots(2021^2-2021+1)} = \frac{2021^2+2021+1}{2^2-2+1} = \frac{2021\cdot2022+1}{3} > \frac{2021\cdot2022}{3} = 2021\cdot674. \quad \textbf{(5Б)}$$

2. Докажи дека за позитивни реални броеви a, b и c важи неравенството $\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq a + b + c$ со равенство, ако и само ако $a = b = c$.

Решение 2: За секои $x, y \in \mathbb{R}^+$ важи $\frac{x^3}{y^2} \geq 3x - 2y$. Притоа, равенство важи ако и само ако $x = y$. **(10Б)**

Множејќи со y^2 и користејќи дека $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, заклучуваме дека споменатото неравенство е еквивалентно со следново неравенство:

$$(*) \qquad (x-y)(x^2+xy+y^2) \geq (x-y)\cdot 3y^2. \quad \textbf{(5Б)}$$

Разгледуваме три случаи:

1° $\quad x > y \ldots (*) \Leftrightarrow \ x^2 + xy + y^2 \geq 3y^2$

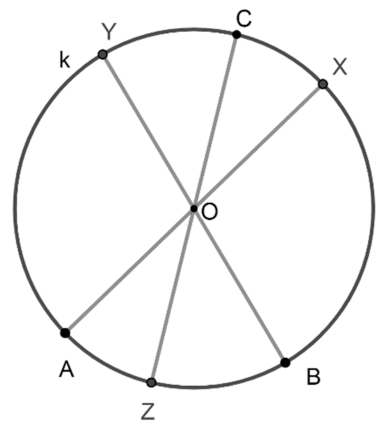
(последното равенство важи, бидејќи $x^2 + xy + y^2 > y^2 + yy + y^2 = 3y^2$)

2° $\quad x = y \ldots (*)$ е тривијално исполнето (важи равенство)

3° $\quad x < y \ldots (*) \Leftrightarrow \ x^2 + xy + y^2 \leq 3y^2$

(последното равенство важи, бидејќи $x^2 + xy + y^2 < y^2 + yy + y^2 = 3y^2$).

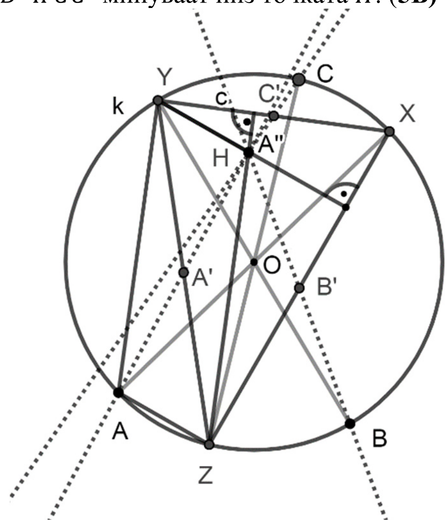
$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} \geq 3a - 2b + 3b - 2c + 3c - 2a = a + b + c. \quad \textbf{(5+5 Б)}$$



3. На кружница k се избрани три точки A, B, C. Нека X, Y, Z соодветно се нивните дијаметрално спротивни точки (во однос на k). Нека A', B', C' се средишните точки на тетивите YZ, ZX, XY соодветно. Докажи дека правите AA', BB', CC' имаат заедничка точка.

Решение 3: Со A'' ја означуваме сликата на точката A при централна симетрија во однос на A'. **(5Б)** Тогаш $YAZA''$ е четириаголник чии дијагонали се преполовуваат во пресечната точка A'; значи $YAZA''$ е паралелограм. Еквивалентно, $A''Y \parallel AZ$ и $A''Z \parallel$

AY . **(5Б)** Бидејќи $\sphericalangle XYA = \sphericalangle XZA = 90°$, следува дека $A''Y \perp XZ$ и $A''Z \perp XY$. **(5Б)** Значи A'' се совпаѓа со ортоцентарот H на триаголникот XYZ. **(5Б)** Слично, правите BB' и CC' минуваат низ точката H. **(5Б)**

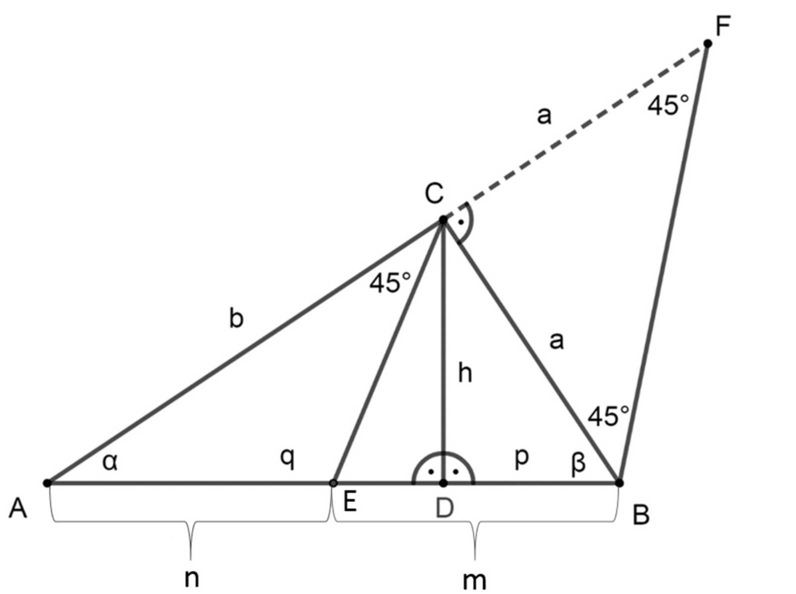


4. Даден е правоаголен триаголник ABC со прав агол кај темето C**.** Точките D и E се соодветно подножја на висината и симетралата на внатрешниот агол повлечени од темето C кон хипотенузата AB. Нека $\overline{AD} = q, \overline{BD} = p$ и $\overline{AE} = n, \overline{BE} = m$. Докажи дека:

a) $a:b = m:n$

b) $p:q = m^2:n^2$

Решение 4:



(5Б)

а) $\Delta AEC \sim \Delta ABF \Rightarrow (m+n):n = (a+b):b \Rightarrow m:n+1 = a:b+1 \Rightarrow a:b = m:n$ **(10Б)**

б) $\Delta CDB \sim \Delta ACB \Rightarrow p:a = a:c \Rightarrow p = \frac{a^2}{c} \wedge \Delta ADC \sim \Delta ACB \Rightarrow q:b = b:c \Rightarrow q = \frac{b^2}{c}$ **(5Б)**

Добиваме дека: $p:q = \frac{a^2}{c}:\frac{b^2}{c} \Rightarrow p:q = a^2:b^2$ **(5Б)**