Сојуз на математичари на Македонија

XLVI ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА

ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ
СКОПЈЕ, 15-16.V.2021

8– одделение – КЛУЧ

1. Докажи дека $3^{2n+1}+2^{n+2}$ е деливо со 7 за секој природен број n.
Решение 1:
Имаме: $3^{2n+1}+2^{n+2}=3\cdot 9^n+4\cdot 2^n=3(9^n-2^n)+7\cdot 2^n$. **(5Б)**
<u>Прв начин</u>: Со низа. Ја формираме низата $1, \frac{9}{2}, (\frac{9}{2})^2, (\frac{9}{2})^3, \cdots, (\frac{9}{2})^{n-1}$. Го запишуваме збирот
S= $1+\frac{9}{2}+(\frac{9}{2})^2+(\frac{9}{2})^3+\cdots+(\frac{9}{2})^{n-1}$. **(5Б)** Множиме со $\frac{9}{2}$ т.е. $\frac{9}{2}\ S=\frac{9}{2}+(\frac{9}{2})^2+(\frac{9}{2})^3+\cdots+(\frac{9}{2})^n$. **(5Б)** Со одземање на последните две равенства имаме:$7S=(\frac{9}{2})^n-1$; $9^n-2^n=7(9^{n-1}+9^{n-2}\cdot 2+9^{n-3}\cdot 2^2+\cdots+2^{n-1})$. **(5Б)** Значи $3^{2n+1}+2^{n+2}=3\cdot 9^n+4\cdot 2^n=3(9^n-2^n)+7\cdot 2^n=$
$=7(3(9^{n-1}+9^{n-2}\cdot 2+9^{n-3}\cdot 2^2+\cdots+2^{n-1})+2^n)$. **(5Б)**

<u>Втор начин</u>: Со примена на формулата $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$ (со доказ **25Б**)
(без доказ **15Б**)
<u>Трет начин</u>: Со конгруенции и примена на импликацијата $a\equiv b(mod\ m)\ \Rightarrow\ a^n\equiv b^n(mod\ m)$ (со доказ **25Б**) **(**без доказ **15Б)**
<u>Четврт начин</u>: Со математичка индукција по n . **(25Б)**
2. Даријан и Ведран со своите моторцикли извозеле од Скопје до Охрид. Даријан првата третина од патот ја возел со брзина од 20 километри на час, втората третина со брзина од 30 километри на час, а последната третина со 40 километри на час. Ведран првата третина од времето ја возел со брзина од 20 километри на час, втората третина од времето со брзина од 30 километри на час, а последната третина од времето со 40 километри на час. Кој од нив двајца побрзо стасал во Охрид? (Одговорот да се образложи.)

Решение 2:
Ги пресметуваме средните брзини на движење на двајцата. Означувајќи ги со v_1, v_2, v_3 редоследно брзините од од 20 километри на час, од 30 километри на час, односно од 40 километри на час, за Даријан имаме: $\frac{3s}{v_{sr}}=\frac{s}{v_1}+\frac{s}{v_2}+\frac{s}{v_3}$, каде s е должина на третина од патот Скопје-Охрид. Така, $v_{sr}(\text{Даријан})=\frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}=27{,}7\ \frac{km}{h}$. **(10Б)**

Од друга страна, за Ведран имаме: $v_{sr}\cdot 3t=v_1t+v_2t+v_3t$, каде t е третина од времетраењето на неговото патување. Значи, $v_{sr}(\text{Ведран})=\frac{v_1+v_2+v_3}{3}=30\ \frac{km}{h}$. **(10Б)**
Заклучуваме дека Ведран побрзо стасал во Охрид. **(5Б)**

3. Дадени се правоаголник и квадрат со еднакви плоштини. Нека a и b се две соседни страни на правоаголникот, а c е страната на квадратот. Докажи дека

$$a+b-c>R\sqrt{2},$$

каде R е радиусот на опишаната кружница околу правоаголникот.

Решение 3: Да забележиме дека $c=\sqrt{ab}$ и $R\sqrt{2}=\frac{2R}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Задачата се сведува на докажување на следново тврдење: За произволни различни $a,b>0$ важи неравенството $a+b>\sqrt{ab}+\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **(5Б)**
<u>Прв начин</u>: Ставајќи $c=\sqrt{ab}$ и $d=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, имаме $ab=c^2$ и $a^2+b^2=2d^2$. **(5Б)** Така, $(a+b)^2=2(c^2+d^2)=(c+d)^2+(c-d)^2\geq(c+d)^2$, со равенство ако и само ако $c=d$. Значи, $a+b\geq c+d$ со равенство ако и само ако $c=d$. **(5Б+5Б)**
Преостанува да забележиме дека равенството $c=d$е еквивалентно со равенството $a=b$. Навистина, $c=d\Leftrightarrow 2ab=a^2+b^2\Leftrightarrow 0=(a-b)^2$. **(5Б)**

<u>Втор начин</u>: Нека $b=t^2a$, при што $t\neq 1$ е позитивен реален број. **(5Б)** Посакуваното неравенство добива облик $1+t^2>\sqrt{\frac{1+t^4}{2}}+t$, односно облик $2(t^2-t+1)^2>1+t^4$. **(5Б)** Преостанува да забележиме дека последното неравенство може да се презапише како $(t-1)^4>0$. **(10Б)**

4. Нека a, b, c се страни на даден ΔABC и притоа важи равенството $a^2+b^2=c^2$. Докажи дека внатрешниот агол наспроти страната c е прав.

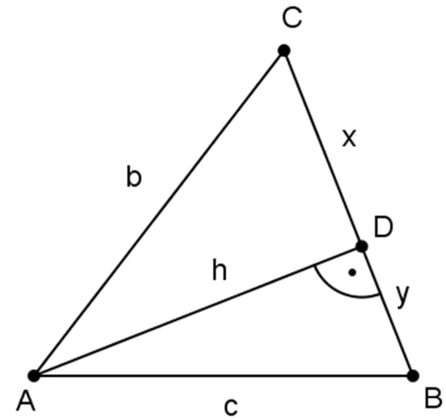
Решение 4: Прв начин: Со примена на Питагорова теорема ќе го докажеме следното посилно тврдење:

$\boxed{\text{T}}$ Нека ABC е триаголник со страни $a=BC$, $b=AC$ и $c=AB$. Важат следните импликации:

(I) ако $\sphericalangle ACB < 90°$, тогаш $c^2 < a^2+b^2$ **(5Б)**

(II) ако $\sphericalangle ACB > 90°$, тогаш $c^2 > a^2+b^2$

Доказ на (I): Висината спуштена од било кое од темињата A и B е во внатрешностана триаголникот ABC (бидејќи $\sphericalangle C < 90°$).



Со ознаките од цртежот ($x=CD, y=BD$), користејќи ја теоремата на Питагора, имаме:

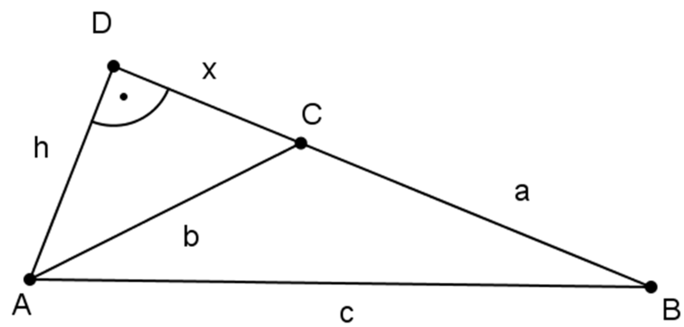
$$a^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$

$$b^2=h^2+x^2$$

$$c^2=h^2+y^2$$

Оттука, $a^2+b^2=c^2+(2x^2+2xy)=c^2+2x(x+y)=c^2+2xa > c^2$. **(10Б)**

Доказ на (II): Висината спуштена од било кое од темињата A и B е во надворешноста на триаголникотABC (бидејќи $\sphericalangle C > 90°$).



Со ознаките од цртежот ($x=CD, y=BD$), користејќи ја теоремата на Питагора, имаме:

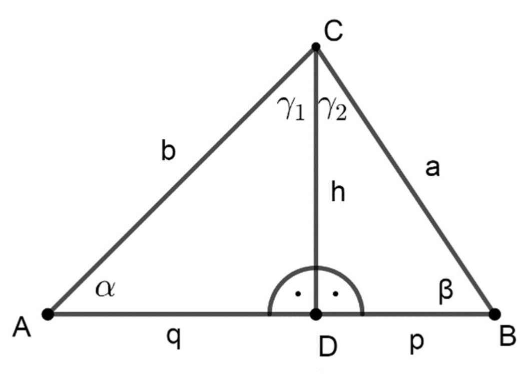
$$a^2=(y-x)^2=y^2-2xy+x^2$$

$$b^2=h^2+x^2$$

$$c^2=h^2+y^2$$

Оттука, $a^2+b^2=c^2-(2xy-2x^2)=c^2-2x(y-x)=c^2-2xa < c^2$. **(10Б)**

Втор начин: Со сличност. Бидејќи $c>a$ и $c>b$, внатрешните агли при темињата A и B се остри. Оттаму, подножјето D на висината спуштена од темето C врз страната AB лежи на отсечката AB. **(5Б)**



Од скицата имаме: $\begin{cases} h^2=a^2-p^2 \\ h^2=b^2-q^2 \end{cases} \Rightarrow 2h^2=a^2+b^2-(p^2+q^2)=c^2-(p^2+q^2)=(p+q)^2-p^2-q^2$. **(10Б)**

$\Rightarrow \ h^2=pq \ \Rightarrow h:p=q:h \ \Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta CDB \ \Rightarrow \gamma_1=\beta \ \wedge \ \gamma_2=\alpha.$ **(5Б)**

Од $\alpha+\gamma_1=90^0 \ \wedge \ \beta+\gamma_2=90^0 \Rightarrow \alpha+\beta=90^0 \ \Rightarrow \gamma=\gamma_1+\gamma_2=90^0 \ \Rightarrow \Delta ABC$ е правоаголен. **(5Б)**