



Сојуз на математичари на Македонија
XLVI ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ
СКОПЈЕ, 15-16.V.2021

7– одделение – КЛУЧ

1. Докажи дека $12^n - 22n - 1$ е деливо со 11 за секој природен број n .

Решение 1: Прв начин: Со низа. Ја формираме низата $1, 12, 12^2, 12^3, \dots, 12^{n-1}$. (5Б) Го запишуваме збирот

$S = 1 + 12 + 12^2 + 12^3 + \dots + 12^{n-1}$. Двете страни множиме со 12 т.е. $12S = 12 + 12^2 + 12^3 + \dots + 12^n$. (5Б+5Б) Со одземање на последните две равенства добиваме: $11S = 12^n - 1$ т.е. $12^n - 1 = 11(1 + 12 + 12^2 + \dots + 12^{n-1})$. (5Б)
Значи $12^n - 22n - 1 = 12^n - 1 - 22n = 11(1 + 12 + 12^2 + \dots + 12^{n-1} - 2n)$. (5Б)

Втор начин: Со примена на формулата $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ (со доказ 25Б)
(без доказ 15Б)

Трет начин: Со конгруенции и користење на импликацијата $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$ (со доказ 25Б) (без доказ 15Б)

Четврт начин: Со математичка индукција по n . (25Б)

2. Пред 4 години, таткото бил трипати постар од своите ќерки Елена и Наташа заедно. Наташа тогаш била два пати постара од Елена. Колку години има Наташа а колку Елена ако татко им е два пати постар од нив двете заедно?

Решение 2:

Нека таткото има t години, ќерката Елена има x и ќерката Наташа има y години.

Гледано пред четири години, имаме: $t - 4 = 3(x - 4 + y - 4)$ и $y - 4 = 2(x - 4)$. (5Б+5Б)

Оттука, $t = 3x + 3y - 20$ и $y = 2x - 4$ т.е. $t = 9x - 32$. (5Б)

Од друга страна, гледано денес, $t = 2(x + y)$ т.е. $t = 6x - 8$. Значи Наташа има 12 години, а Елена има 8 години. (5Б+5Б)

3. На располагање се две кофи, река и празно отворено буре. Не е дозволено претурање од една кофа во друга. Дали може да се одмерат 13 литри вода во бурето ако кофите се со зафатнини од:

А) 7 литри и 11 литри?

Б) 6 литри и 10 литри?

(Одговорите да се образложат.)

Решение 3:

А) Одговор: Може. Образложение: $2 \cdot 11 - 3 \cdot 7 = 1$ па така $26 \cdot 11 - 39 \cdot 7 = 13$. (8Б+7Б)

Б) Одговор: Не може. Образложение: 13 е непарен број, а зафатнината на секоја кофа е парен број. (10Б)

4. Плоштините на три зида на дрвен квадар изнесуваат 6 dm^2 ; 8 dm^2 ; 12 dm^2 . Кај секое од темињата изделкана и отстранета е коцка едно од чии темиња се совпаѓа со темето на квадратот, при што страната на коцката изнесува 25% од најмалата страна на квадратот. Пресметај:

А) Број на темиња, рабови и сидови на добиеното тело.

Б) Плоштина и волумен на квадратот и телото.

В) Процент на плоштината и процент на волуменот на телото во однос на квадратот.

Решение 4:

А) Темиња: 56; рабови: 84; сидови: 30. (5Б)

Нека a, b, c се димензиите на квадратот (во dm) т.ш. $a < b < c$. Од $ab = 6, ac = 8, bc = 12$ се добива $(abc)^2 = 576$ т.е. $abc = 24$. Значи $a = 2 \text{ dm}, b = 3 \text{ dm}, c = 4 \text{ dm}$. (5Б) Нека x е работ на коцката (во dm). Тогаш $x = \frac{25 \cdot 2}{100} = 0,5 \text{ dm}$. (5Б)

Б) $P_{kv} = 52 \text{ dm}^2$; $V_{kv} = 24 \text{ dm}^3$

$P_t = 52 \text{ dm}^2$; $V_t = 24 - 8 \cdot 0,5^3 = 23 \text{ dm}^3$ (5Б)

В) $p_p = \frac{100 \cdot P_t}{P_{kv}} = 100 \%$; $p_v = \frac{V_t \cdot 100}{V_{kv}} = 95,8(3) \%$ (5Б)