Сојуз на математичари на Македонија

XLVI ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА

ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

СКОПЈЕ, 15-16.V.2021

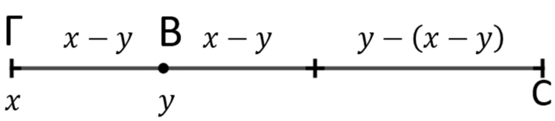
6– одделение – КЛУЧ

1. Најди ги сите реални решенија на следниот систем равенки: $a+b+c=0, \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

Решение 1: Ниту еден од трите броја не е еднаков на 0. **(5Б)** Двете равенки повлекуваат дека: $\frac{1}{c}=-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{-(a+b)}{ab}=\frac{c}{ab}$. **(5Б)** Оттука, $ab=c^2>0$. Слично се добива дека:$ac=b^2>0; bc=a^2>0$**(5Б)** Следува дека броевите a, b, c имаат ист предзнак ($+$ или $-$). **(5Б)** Но тогаш не е можно нивната сума да биде 0. Значи системот нема решенија. **(5Б)**

2. Горан имал тројно повеќе години отколку што имала Виолета кога бил на нејзината сегашна возраст. Одреди го односот на годините на Горан и Виолета.

Решение 2:



Нека Горан сега има x години, а Виолета y години. Кога Горан бил на нејзината сегашна возраст, тој имал $x-(x-y)$ години **(5Б)** , а таа имала $y-(x-y)$ години. **(5Б)**

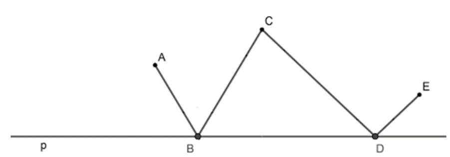
Значи: $x-(x-y)=3(y-(x-y))$ **(5Б)**, односно $3x=5y$. **(5Б)**

Заклучуваме дека односот од годините на Горан и годините на Виолета е $5:3$. **(5Б)**

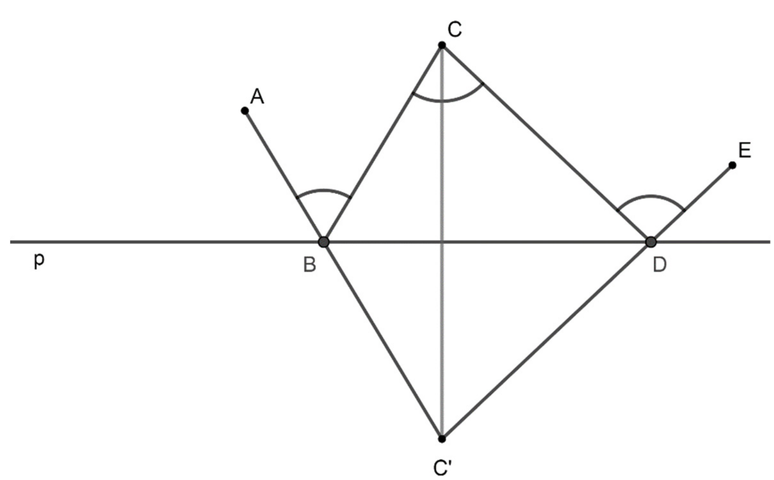
3. Три ученици се договориле за ужинка да си поделат 11 еднакви кифлички. За таа прилика Трајко донел 5 кифлички, Вангел донел 6 кифлички, а Јордан донел 11 денари. Како овие 11 денари треба да ги распределат меѓусебе Трајко и Вангел, за тројцата ученици рамноправно да учествуваат во трошоците за ужинката?

Решение 3: Бидејќи Јордан си го платил својот дел од ужинката, ужинката на тројцата вреди 33 денари. **(5Б)** Значи, секоја кифличка вреди 3 денари. **(5Б)** Следствено, петте кифлички на Трајко вредат 15 денари, а тој ужинал за 11 денари. **(5Б+5Б)** Заклучуваме дека Трајко треба да земе 4 денари, а Вангел преостанатите 7 денари. **(5Б)**

4. Искршената линија $L=ABCDE$ не преоѓа под правата p со која има точно две заеднички точки: B и D. Притоа, од сите такви искршени линии за кои прво, трето и петто теме се редоследно дадените точки A, C и E, линијата L е со најмала можна должина. Докажи дека $\sphericalangle ABC+\sphericalangle CDE=2\sphericalangle BCD$.



Решение 4: Нека C' е точката што е симетрична на C во однос на правата p. **(5Б)** Тогаш B е пресечна точка на правите AC' и p; слично, D е пресечна точка на правите EC' и p. **(5Б)**. Во тој случај искршената линија $L=ABCDE$ има најмала должина(Бидејќи $\overline{BC}=\overline{BC'}$; $\overline{DC}=\overline{DC'}$) **(5В)** .



Од скицата воочуваме дека:$\sphericalangle C'BD+\sphericalangle CBD+\sphericalangle ABC=180^o$; $\sphericalangle C'DB+\sphericalangle BDC+\sphericalangle CDE=180^o$

Од $\triangle BDC$ имаме: $\sphericalangle CBD+\sphericalangle BCD+\sphericalangle BDC=180^o \implies \sphericalangle ABC+EDC=2\sphericalangle BCD$ **(5Б+5Б)**.