Четврта година

1. По исфрлање на три последователни броја, од низата на природни броеви од 1 до 2021, утврдено е дека аритметичката средина на преостанатите броеви е цел број. Одреди ги броевите кои биле исфрлени.

Решение. Збирот на сите природни броеви од 1 до 2021 изнесува $S=\frac{2021\cdot 2022}{2}=2021\cdot 1011$. Нека x-1, x и x+1 се исфрлените броеви. Тогаш аритметичката средина на преостанатите броеви во низата ќе биде:

$$N=\frac{2021\cdot 1011-(x-1+x+x+1)}{2021-3}=\frac{2021\cdot 1011-3x}{2018}.$$

Да воведеме замена $x=1011+y$, каде $-1009\le y\le 1009$. Во последниот израз добиваме

$$N=\frac{2021\cdot 1011-3(1011+y)}{2018}=\frac{2018\cdot 1011-3y}{2018}=1011-\frac{3y}{2018}.$$

Според условот од задачата, ова треба да е цел број. Но од ограничувањето за y имаме дополнително дека $-\frac{3}{2}\le\frac{3y}{2018}\le\frac{3}{2}$.

Цели броеви во овој интервал се -1, 0 и 1, од каде следи дека $y=0$ е единствената можна вредност за y. Значи, исфрлените броеви се 1010, 1011 и 1012.

(**Забелешка**. По утврдување на изразот за N, вредноста на x може да се одреди и со директна оценка на N и користење на условот за цел број).

2. Помеѓу група од n луѓе постојат 2021 взаемни пријателства (пријателството е симетрична релација). Познато е дека не постои личност со повеќе од 45 пријатели, како и дека постои личност која има точно 45 пријатели. Ако со x_k го означиме бројот на пријатели кои ги има k -тата личност, докажи дека важи:

$$x_1^2+x_2^2+....+x_n^2\le 2024n+2018.$$

Решение. Бидејќи постои личност која има 45 пријатели, јасно е дека $n\ge 46$.
Од условите на задачата заклучуваме $x_k\le 45$ и $x_1+...+x_n=2\cdot 2021=4042$. Оттука добиваме:

$$x_k^2-x_k=x_k(x_k-1)\le 45\cdot(45-1)=1980 \text{ за } k=1,...,n. \quad (1)$$

Од $x_1+...+x_n=4042$ и (1) следува дека

$$x_1^2+x_2^2+....+x_n^2\le 1980n+(x_1+...+x_n)=1980n+4042.$$

Останува да докажеме дека $1980n+4042\le 2024n+2018$, што е еквивалентно со $n\ge 46$.

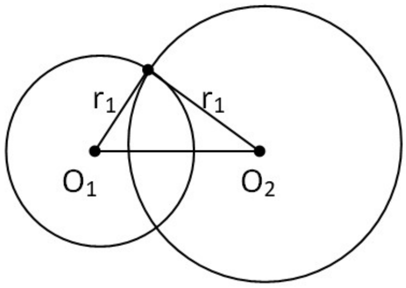
3. Најди го центарот на кружница со радиус r, која ја сече секоја кружница што минува низ точките $(-1,0)$ и $(1,0)$ под агол од 90°. Две кружници се сечат под агол α, доколку аголот кој го формираат тангентите повлечени во пресечната точка на кружниците е α.

Решение. Ако дадена кружница минува низ точките $(-1,0)$ и $(1,0)$, нејзиниот центар лежи на y-оската. Да го означиме овој центар со $O(0,q)$. Тогаш равенката на произволна кружница K која минува низ $(-1,0)$ и $(1,0)$ гласи

$$K: x^2+(y-q)^2=q^2+1,\ \ K\left((0,q);\sqrt{q^2+1}\right). \qquad (1)$$

Сега, да забележиме дека две кружници $K_1\left(O_1;r_1\right)$ и $K_2(O_2;r_2)$ се сечат под прав агол, ако и само ако важи:

$r_1^2+r_2^2=\overline{O_1O_2}^{\,2}$, каде $\overline{O_1O_2}$ е растојанието меѓу нивните центри. (2)



Нека центарот на кружницата со радиус $r>0$, која ја сече произволна кружница од облик (1) под агол од 90°, се наоѓа во точката (a,b). Од равенката (2) имаме:

$$r^2+q^2+1=a^2+(b-q)^2, \text{ односно}$$
$$r^2+1=a^2+b^2-2bq.$$

Последното равенство треба да важи за произволно q, па со изедначување на полиномите од двете страни го добиваме системот: $\begin{cases}2b=0\\ r^2+1=a^2+b^2\end{cases}$.

Неговото решение е $b=0, a=\pm\sqrt{r^2+1}$.

Значи, центарот на бараната кружница е во точката $(\sqrt{r^2+1},0)$ или $(-\sqrt{r^2+1},0)$.

4. Нека $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е низа дефинирана на следниот начин:

$$a_1=2, a_2=5 \text{ и } a_{n+2}=(5-n^3)a_{n+1}+(5+n^3)a_n \text{ за } n\geq 1.$$

Дали постојат природни броеви m,n и t за кои важи $a_m\cdot a_n=a_t$?

Решение. Првите неколку членови на дадената низа се $2,5,32,-31,1706,\ldots$

Со помош на математичка индукција ќе докажеме дека $a_n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$, за $n\geq 1$. Јасно $a_1,a_2\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$. Да претпоставиме дека $a_n,a_{n+1}\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$. Тогаш $a_{n+2}\equiv(5-n^3)2+(5+n^3)2=20\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$. Оттука $a_n\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$, за $n\geq 1$.

Бидејќи $a_m\cdot a_n\equiv 2\cdot 2\equiv 4\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,3)$ и $a_t\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,3)$, добиваме дека не постојат природни броеви m,n и t за кои важи $a_m\cdot a_n=a_t$.