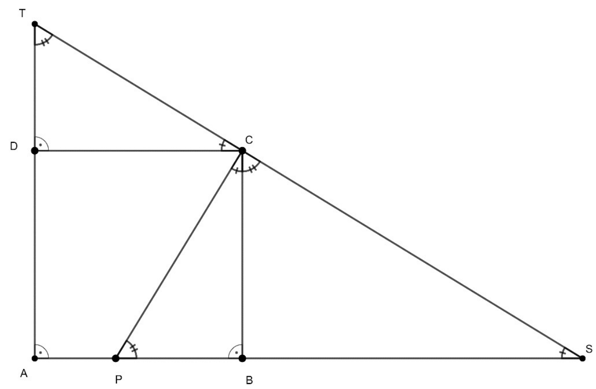
Трета година

1. Даден е квадратот $ABCD$ со должина на страна 1. На страната AB избрана е произволна точка P. Правата која минува низ темето C и е нормална на отсечката CP, ги сече продолженијата на страните AB и AD во точките S и T соодветно. Ако $\overline{AS}=x$ и $\overline{AT}=y$, докажи дека важи $\log(x+y)=\log x+\log y.$

Прво решение. Нека $\overline{AP}=t.$ Тогаш $\overline{BP}=1-t.$ Ќе ги претставиме x и y со помош на t.
Од условите на задачата важи $\Delta BCP\cong\Delta DCT$ (види цртеж), и затоа $\overline{DT}=\overline{BP}=1-t.$ Јасно, сега $y=2-t.$ Од сличноста на триаголниците ΔDTC и ΔATS следува $\overline{DT}:\overline{AT}=\overline{DC}:\overline{AS}$ од каде пак добиваме $x=\overline{AS}=\frac{\overline{AT}\cdot\overline{DC}}{\overline{DT}}=\frac{2-t}{1-t}.$

Тогаш $\log(x+y)=\log\left(\frac{2-t}{1-t}+2-t\right)=\log\frac{(2-t)^2}{1-t}=\log\frac{2-t}{1-t}+\log(2-t)=\log x+\log y.$

Второ решение. Може да ги искористиме и плоштините на триаголниците и тоа
$P_{\triangle BSC}=\frac{\overline{BS}\cdot\overline{BC}}{2}=\frac{(x-1)1}{2}$,
$P_{\triangle DCT}=\frac{\overline{DC}\cdot\overline{DT}}{2}=\frac{(y-1)1}{2}$.

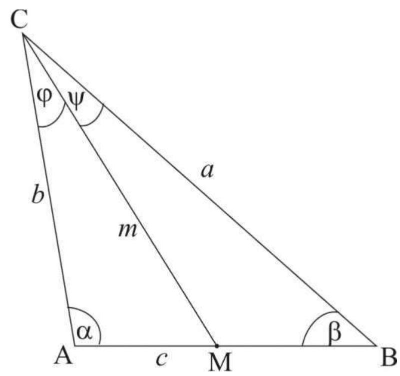


Притоа, да забележиме дека $P_{\triangle AST}=P_{ABCD}+P_{\triangle BSC}+P_{\triangle DCT}.$ Добиваме $\frac{xy}{2}=1+\frac{(x-1)1}{2}+\frac{(y-1)1}{2}$ односно $\frac{xy}{2}=1+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}-1$. Ова го средуваме до $xy=x+y$ и директно следува дека $\log(xy)=\log(x+y)$ односно $\log x+\log y=\log(x+y).$

2. Даден е триаголник ABC, за кој $\overline{AC}\neq\overline{BC}.$ Нека M е средината на страната AB и нека $\alpha=\measuredangle BAC,\beta=\measuredangle ABC,\varphi=\measuredangle ACM,\psi=\measuredangle BCM$. Докажи дека важи

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}.$$

Решение. Да ја означиме должината $\overline{CM}=m.$ Со примена на косинусната теорема на триаголниците ACM и BCM имаме



$$b^2+m^2-2bm\cos\varphi=\left(\frac{c}{2}\right)^2=a^2+m^2-2am\cos\psi,$$

$$b^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-bc\cos\alpha=m^2=a^2+\left(\frac{c}{2}\right)^2-ac\cos\beta.$$

Средувајќи ги изразите добиваме равенства
$2m(a\cos\psi-b\cos\varphi)=a^2-b^2$ и
$c(a\cos\beta-b\cos\alpha)=a^2-b^2$.

Изедначувајќи ги левите страни сега имаме $a\cos\psi - b\cos\varphi = \frac{c}{2m}(a\cos\beta - b\cos\alpha)$.

Со примена на синусната теорема на триаголникот ACM имаме $\frac{c}{2m} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$.

Со замена во претходното равенство добиваме $\frac{\sin\varphi}{a\cos\psi - b\cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha}$,

односно $\frac{\sin\varphi}{\frac{a}{b}\cos\psi - \cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\frac{a}{b}\cos\beta - \cos\alpha}$.

Сега од $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$, равенство кое е добиено од синусната теорема за триаголниците ABC, ACM, BCM, имаме $\frac{\sin\varphi}{\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cos\psi - \cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta - \cos\alpha}$.

Го средуваме последното и го добиваме бараното равенство

$$\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

3. Одреди ги сите вредности на реалниот параметар a, така да секое x од интервалот $[-1,1]$ го задоволува неравенството $ax^2 + 2(a+1)x + a - 4 \le 0$.

Решение. Дадената неравенка може да ја трансформираме во квадратен трином по $x+1$, имено во облик $a(x+1)^2 + 2(x+1) - 6 \le 0$, односно со смена $x+1 = t$, во облик $at^2 + 2t - 6 \le 0$. Последново неравенство е задоволено за секое $t \in [0,2]$.

За $t = 0$, неравенството преминува во $-6 \le 0$ што е точно за секое a, a реален број.

За $t \in (0,2]$, $a \le \frac{6-2t}{t^2} = 2\left(\frac{3}{t^2} - \frac{1}{t}\right) = 2\left(3u^2 - u\right)$, за $u = \frac{1}{t}, u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Неравенството $a \le 2\left(3u^2 - u\right)$ треба да е задоволено за секое $u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, од каде е доволно параметарот a да е од горе ограничен со минимумот на квадратната функција $2\left(3u^2 - u\right)$, на дадениот интервал, односно $a \le \min\limits_{u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)} \{2(3u^2 - u)\}$. Квадратната функција $f(u) = 2(3u^2 - u)$ има минимум во темето $u = \frac{1}{6}$, и расте за $u > \frac{1}{6}$. Тогаш за $u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, локално, минимум се постигнува во $u = \frac{1}{2}$. Значи $a \le 2(3\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, па бараните вредности на параметарот се сите $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

4. Нека $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_{2021}\in(0,1)$ и $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$. За изразот $A=\frac{2021\cdot\sin(\alpha_1 x)\sin(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\sin(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+\ldots+\cos(\alpha_{2021}x)}$ докажи дека е точно неравенството

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}A\geq 2020\cdot 2021.$$

Решение. Од тоа што $\alpha_i x\in(0,\frac{\pi}{4})$ за сите $i\in\{1,2,\cdots,2021\}$, јасно е дека $\cos(\alpha_i x)>0$ и важи неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+\cdots+\cos(\alpha_{2021}x)\geq 2021\sqrt[2021]{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdots\cos(\alpha_{2021}x)}\quad.$$

Од друга страна сигурно важи $\sin(\theta)\leq\cos(\theta)$ за $\theta\in(0,\frac{\pi}{4})$. Сега следува дека

$$A=\frac{2021\cdot\sin(\alpha_1 x)\sin(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\sin(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+\cdots+\cos(\alpha_{2021}x)}\leq\frac{2021\cdot\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdots\cos(\alpha_{2021}x)}{\cos(\alpha_1 x)+\cos(\alpha_2 x)+\cdots+\cos(\alpha_{2021}x)}\leq$$

$$\leq\frac{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x)}{\sqrt[2021]{\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x)}}=(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x))^{1-\frac{1}{2021}}.$$

Јасно, $\cos(\alpha_i x)\in(0,1)$ за $i\in\{1,2,\cdots,2021\}$ па логаритмирајќи го неравенството

$$A\leq(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdots\cos(\alpha_{2021}x))^{\frac{2020}{2021}}$$

добиваме

$$\log_{\cos(\alpha_i x)}A\geq\frac{2020}{2021}\log_{\cos(\alpha_i x)}(\cos(\alpha_1 x)\cos(\alpha_2 x)\cdots\cos(\alpha_{2021}x)).$$

Ги собираме ваквите логаритми за секое $i\in\{1,2,\cdots,2021\}$ и добиваме:

Алтернатива 1. $\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}A\geq$

$$\geq\frac{2020}{2021}\left[\log_{\cos(\alpha_1 x)}(\cos(\alpha_1 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x))+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}(\cos(\alpha_1 x)\cdot\ldots\cdot\cos(\alpha_{2021}x))\right]=$$

$$=\frac{2020}{2021}\cdot\left(\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_1 x)+\cdots+\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_{2021}x)\right)+\cdots+$$

$$+\left(\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_1 x)+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021}x)}\cos(\alpha_{2021}x)\right)=$$

$$=\frac{2020}{2021}[2021+\left(\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_2 x)+\log_{\cos(\alpha_2 x)}\cos(\alpha_1 x)\right)+\cdots+$$

$$+\left(\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_{2021} x)+\log_{\cos(\alpha_{2021} x)}\cos(\alpha_1 x)\right)+$$

$$+\ldots+\left(\log_{\cos(\alpha_{2021} x)}\cos(\alpha_{2020} x)+\log_{\cos(\alpha_{2020} x)}\cos(\alpha_{2021} x)\right)].$$

Бидејќи $0<\cos(\alpha_i x), \cos(\alpha_j x)<1$ важи $\log_{\cos(\alpha_i x)}\cos(\alpha_j x)>0$ и повторно користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\log_{\cos(\alpha_i x)}\cos(\alpha_j x)+\log_{\cos(\alpha_j x)}\cos(\alpha_i x)\geq 2\,.$$

Конечно,

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021} x)}A\geq\frac{2020}{2021}\left[2021+2\frac{2021\cdot 2020}{2}\right]=2021\cdot 2020.$$

Алтернатива 2. Јасно, $0<\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)<1$ и $0<A<1$ па следува

$$\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}A\geq\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}\left(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)\right)^{\frac{2020}{2021}}.$$

Користејќи го неравенството меѓу хармониската и аритметичката средина имаме

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021} x)}A=\frac{1}{\log_A\cos(\alpha_1 x)}+\cdots+\frac{1}{\log_A\cos(\alpha_{2021} x)}\geq$$

$$\geq\frac{2021^2}{\log_A\cos(\alpha_1 x)+\cdots+\log_A\cos(\alpha_{2021} x)}=\frac{2021^2}{\log_A\left(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)\right)}=$$

$$=2021^2\cdot\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}A\geq 2021^2\cdot\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}\left(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)\right)^{\frac{2020}{2021}}=$$

$$=2021^2\cdot\frac{2020}{2021}\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}\left(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)\right)=2021\cdot 2020.$$