Изедначувајќи ги левите страни сега имаме $a\cos\psi - b\cos\varphi = \frac{c}{2m}(a\cos\beta - b\cos\alpha)$.

Со примена на синусната теорема на триаголникот ACM имаме $\frac{c}{2m} = \frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$.

Со замена во претходното равенство добиваме $\frac{\sin\varphi}{a\cos\psi - b\cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{a\cos\beta - b\cos\alpha}$,

односно $\frac{\sin\varphi}{\frac{a}{b}\cos\psi - \cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\frac{a}{b}\cos\beta - \cos\alpha}$.

Сега од $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}$, равенство кое е добиено од синусната теорема за триаголниците ABC, ACM, BCM, имаме $\frac{\sin\varphi}{\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\cos\psi - \cos\varphi} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta - \cos\alpha}$.

Го средуваме последното и го добиваме бараното равенство

$$\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

3. Одреди ги сите вредности на реалниот параметар a, така да секое x од интервалот $[-1,1]$ го задоволува неравенството $ax^2 + 2(a+1)x + a - 4 \le 0$.

Решение. Дадената неравенка може да ја трансформираме во квадратен трином по $x+1$, имено во облик $a(x+1)^2 + 2(x+1) - 6 \le 0$, односно со смена $x+1 = t$, во облик $at^2 + 2t - 6 \le 0$. Последново неравенство е задоволено за секое $t \in [0,2]$.

За $t = 0$, неравенството преминува во $-6 \le 0$ што е точно за секое a, a реален број.

За $t \in (0,2]$, $a \le \frac{6-2t}{t^2} = 2\left(\frac{3}{t^2} - \frac{1}{t}\right) = 2\left(3u^2 - u\right)$, за $u = \frac{1}{t}, u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$. Неравенството $a \le 2\left(3u^2 - u\right)$ треба да е задоволено за секое $u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, од каде е доволно параметарот a да е од горе ограничен со минимумот на квадратната функција $2\left(3u^2 - u\right)$, на дадениот интервал, односно $a \le \min\limits_{u\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)} \{2(3u^2 - u)\}$. Квадратната функција $f(u) = 2(3u^2 - u)$ има минимум во темето $u = \frac{1}{6}$, и расте за $u > \frac{1}{6}$. Тогаш за $u \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$, локално, минимум се постигнува во $u = \frac{1}{2}$. Значи $a \le 2(3\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, па бараните вредности на параметарот се сите $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

4. Нека $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2021} \in (0,1)$ и $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$. За изразот $A = \frac{2021 \cdot \sin(\alpha_1 x) \sin(\alpha_2 x) \cdot \ldots \cdot \sin(\alpha_{2021} x)}{\cos(\alpha_1 x) + \cos(\alpha_2 x) + \ldots + \cos(\alpha_{2021} x)}$ докажи дека е точно неравенството

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)} A + \log_{\cos(\alpha_2 x)} A + \cdots + \log_{\cos(\alpha_{2021} x)} A \geq 2020 \cdot 2021.$$

Решение. Од тоа што $\alpha_i x \in (0, \frac{\pi}{4})$ за сите $i \in \{1, 2, \cdots, 2021\}$, јасно е дека $\cos(\alpha_i x) > 0$ и важи неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$\cos(\alpha_1 x) + \cos(\alpha_2 x) + \cdots + \cos(\alpha_{2021} x) \geq 2021 \sqrt[2021]{\cos(\alpha_1 x) \cos(\alpha_2 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)} \ .$$

Од друга страна сигурно важи $\sin(\theta) \leq \cos(\theta)$ за $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$. Сега следува дека

$$A = \frac{2021 \cdot \sin(\alpha_1 x) \sin(\alpha_2 x) \cdot \ldots \cdot \sin(\alpha_{2021} x)}{\cos(\alpha_1 x) + \cos(\alpha_2 x) + \cdots + \cos(\alpha_{2021} x)} \leq \frac{2021 \cdot \cos(\alpha_1 x) \cos(\alpha_2 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)}{\cos(\alpha_1 x) + \cos(\alpha_2 x) + \cdots + \cos(\alpha_{2021} x)} \leq$$

$$\leq \frac{\cos(\alpha_1 x) \cos(\alpha_2 x) \cdot \ldots \cdot \cos(\alpha_{2021} x)}{\sqrt[2021]{\cos(\alpha_1 x) \cos(\alpha_2 x) \cdot \ldots \cdot \cos(\alpha_{2021} x)}} = (\cos(\alpha_1 x) \cos(\alpha_2 x) \cdot \ldots \cdot \cos(\alpha_{2021} x))^{1 - \frac{1}{2021}}.$$

Јасно, $\cos(\alpha_i x) \in (0,1)$ за $i \in \{1, 2, \cdots, 2021\}$ па логаритмирајќи го неравенството

$$A \leq (\cos(\alpha_1 x) \cos(\alpha_2 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x))^{\frac{2020}{2021}}$$

добиваме

$$\log_{\cos(\alpha_i x)} A \geq \frac{2020}{2021} \log_{\cos(\alpha_i x)} (\cos(\alpha_1 x) \cos(\alpha_2 x) \cdots \cos(\alpha_{2021} x)).$$

Ги собираме ваквите логаритми за секое $i \in \{1, 2, \cdots, 2021\}$ и добиваме:

Алтернатива 1. $\log_{\cos(\alpha_1 x)} A + \log_{\cos(\alpha_2 x)} A + \cdots + \log_{\cos(\alpha_{2021} x)} A \geq$

$$\geq \frac{2020}{2021} \left[\log_{\cos(\alpha_1 x)} (\cos(\alpha_1 x) \cdot \ldots \cdot \cos(\alpha_{2021} x)) + \cdots + \log_{\cos(\alpha_{2021} x)} (\cos(\alpha_1 x) \cdot \ldots \cdot \cos(\alpha_{2021} x)) \right] =$$

$$= \frac{2020}{2021} \cdot \left(\log_{\cos(\alpha_1 x)} \cos(\alpha_1 x) + \cdots + \log_{\cos(\alpha_1 x)} \cos(\alpha_{2021} x) \right) + \cdots +$$

$$+ \left(\log_{\cos(\alpha_{2021} x)} \cos(\alpha_1 x) + \cdots + \log_{\cos(\alpha_{2021} x)} \cos(\alpha_{2021} x) \right) =$$

$$=\frac{2020}{2021}[2021+\left(\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_2 x)+\log_{\cos(\alpha_2 x)}\cos(\alpha_1 x)\right)+\cdots+$$

$$+\left(\log_{\cos(\alpha_1 x)}\cos(\alpha_{2021} x)+\log_{\cos(\alpha_{2021} x)}\cos(\alpha_1 x)\right)+$$

$$+\ldots+\left(\log_{\cos(\alpha_{2021} x)}\cos(\alpha_{2020} x)+\log_{\cos(\alpha_{2020} x)}\cos(\alpha_{2021} x)\right)].$$

Бидејќи $0<\cos(\alpha_i x),\cos(\alpha_j x)<1$ важи $\log_{\cos(\alpha_i x)}\cos(\alpha_j x)>0$ и повторно користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\log_{\cos(\alpha_i x)}\cos(\alpha_j x)+\log_{\cos(\alpha_j x)}\cos(\alpha_i x)\geq 2\,.$$

Конечно,

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021} x)}A\geq\frac{2020}{2021}\left[2021+2\frac{2021\cdot 2020}{2}\right]=2021\cdot 2020.$$

Алтернатива 2. Јасно, $0<\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)<1$ и $0<A<1$ па следува

$$\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}A\geq\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}\left(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)\right)^{\frac{2020}{2021}}.$$

Користејќи го неравенството меѓу хармониската и аритметичката средина имаме

$$\log_{\cos(\alpha_1 x)}A+\log_{\cos(\alpha_2 x)}A+\cdots+\log_{\cos(\alpha_{2021} x)}A=\frac{1}{\log_A\cos(\alpha_1 x)}+\cdots+\frac{1}{\log_A\cos(\alpha_{2021} x)}\geq$$

$$\geq\frac{2021^2}{\log_A\cos(\alpha_1 x)+\cdots+\log_A\cos(\alpha_{2021} x)}=\frac{2021^2}{\log_A\left(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)\right)}=$$

$$=2021^2\cdot\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}A\geq 2021^2\cdot\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}\left(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)\right)^{\frac{2020}{2021}}=$$

$$=2021^2\cdot\frac{2020}{2021}\log_{(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x))}\left(\cos(\alpha_1 x)\cdots\cos(\alpha_{2021} x)\right)=2021\cdot 2020.$$