Втора година

1. Во една игра се користат три видови на монети, секој вид со различна вредност изразена во денари. Вредноста на монетите е било кој цел позитивен број. Бојан, Аце и Сашо имаат секој по барем една монета од секој вид. Бојан има 4 монети со вкупна вредност 28 денари, Аце има 5 монети со вкупна вредност 21 денар, а Сашо има 3 монети. Која е вкупната вредност на монетите на Сашо?

Решение. Нека a,b и c се вредностите на монетите, па за вредноста на монетите на Бојан важи $2a+b+c=28$.
Тогаш вредноста на монетите на Аце може да биде: $3a+b+c$, $2a+2b+c$, $2a+b+2c$, $a+2b+2c$, $a+3b+c$ или $a+b+3c$.
Од тоа што
$3a+b+c=2a+b+c+a=28+a>28$, $2a+2b+c=2a+b+c+b=28+b>28$ и $2a+b+2c=2a+b+c+c=28+c>28$, следува дека можни случаи се следниве: $a+2b+2c=21$, $a+3b+c=21$ или $a+b+3c=21$.
- За $a+2b+2c=21$, ако се соберат $a+2b+2c=21$ и $2a+b+c=28$ добиваме $3(a+b+c)=49$, што не е можно затоа што 49 не е делив со 3.
- За $a+3b+c=21$, ако од $2a+b+c=28$ одземеме $a+3b+c=21$ добиваме $a-2b=7$ и оттука $a=2b+7$, значи a е непарен број и тоа најмалку 9.
Сега, за $a=9$, добиваме $b=1$ и $c=9$, ама a,b и c се различни, па a е најмалку 11. Од тоа што $b+c\geq 3$, имаме $28=2a+b+c\geq 2a+3$ и оттука $2a\leq 25$, т.е. $a\leq 12$.
Значи, $a=11$, $b=2$ и $c=4$, па $a+b+c=17$.
Слично, ако $a+b+3c=21$ се добива дека $a=11$, $b=4$ и $c=2$, па $a+b+c=17$.
Значи, вкупната вредност на монетите на Сашо е 17 денари.

2. Реши го системот: $\begin{cases} 11x-yz=18 \\ 11y-zx=18 \\ 11z-xy=18 \end{cases}$.

Решение. Ако од првата равенка ја одземеме втората равенка добиваме $11x-11y-yz+zx=0$, $11(x-y)+z(x-y)=0$, $(x-y)(11+z)=0$. Разгледуваме две различни можности:
1. Нека $x=y$. Тогаш, ако од $11x-xz=18$ ја одземеме третата равенка $11z-x^2=18$ добиваме $(x-z)(11+x)=0$. Имаме два случаи:
- $x=z$, тогаш $x=y=z$ па $x^2-11x+18=0$ и добиваме $x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2}=\frac{11\pm 7}{2}$, т.е. $x_1=9$ или $x_2=2$. Решенија на системот се $(2,2,2)$ и $(9,9,9)$.
- $x=-11$, тогаш $y=-11$ и имаме $z=\frac{x^2+18}{11}=\frac{121+18}{11}=\frac{139}{11}$, па решение на системот е $(-11,-11,\frac{139}{11})$.

2. Нека $z=-11$. Тогаш, од третата равенка следува $xy=-121-18=-139$, а од првата $11x+11y=18$, т.е. $x+y=\frac{18}{11}$. Јасно, сега x и y се решенија на квадратната равенка $u^2-\frac{18}{11}u-139=0$, од каде добиваме:

$$u_{1,2}=\frac{\frac{18}{11}\pm\sqrt{\frac{324}{121}+556}}{2}=\frac{18\pm\sqrt{324+556\cdot121}}{2\cdot11}=\frac{18\pm260}{2\cdot11}=\frac{9\pm130}{11},$$

односно $x=\frac{139}{11}, y=-11$ или $x=-11, y=\frac{139}{11}$. Решенија на системот се $(\frac{139}{11},-11,-11)$ и $(-11,\frac{139}{11},-11)$.

Конечно, сите решенија на системот се: $(2,2,2)$, $(9,9,9)$, $(-11,-11,\frac{139}{11})$, $(\frac{139}{11},-11,-11)$ и $(-11,\frac{139}{11},-11)$.

3. Дали е можно да се најдат четири различни реални броеви такви што кубот на секој од тие броеви е еднаков на збирот на квадратите на останатите три броеви? Образложи го и докажи го твојот одговор.

Решение. Од тоа што w,x,y,z се различни реални броеви и равенките се симетрични, без губење на општоста може да претпоставиме дека $w>x>y>z$. Според условот на задачата го добиваме следниот систем

$$\begin{cases} x^3=y^2+z^2+w^2 \\ y^3=z^2+w^2+x^2 \\ z^3=w^2+x^2+y^2 \\ w^3=x^2+y^2+z^2 \end{cases}.$$

Од тоа што $z^3=w^2+x^2+y^2$ и $w^2+x^2+y^2\geq0$ следува $z\geq0$.

Ако $z=0$, тогаш од $w^2+x^2+y^2=0$ следува $w=x=y=0$. Ова е во контрадикција со условот броевите да се различни, па затоа мора $z>0$, уште повеќе $w>x>y>z>0$.

Од $w^3=x^2+y^2+z^2$ и $w>x>y>z$ следува $w^3=x^2+y^2+z^2<3w^2$, а оттука $w^3-3w^2<0$ односно $w^2(w-3)<0$. Бидејќи $w^2\geq0$, добиваме $w-3<0$ т.е. $0<w<3$, а оттука следува $0<z<y<x<w<3$.

Ако ги собереме сите равенки во системот добиваме:

$$w^3+x^3+y^3+z^3=3x^2+3y^2+3z^2+3w^2,$$

$$(w^3-3w^2)+(x^3-3x^2)+(y^3-3y^2)+(z^3-3z^2)=0$$

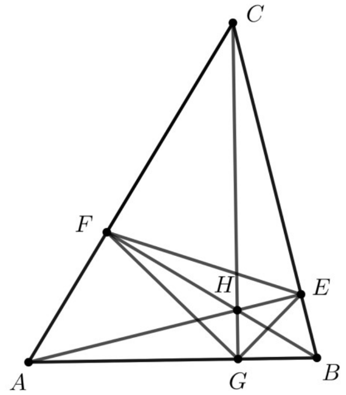
За било кој број $0<a<3$ важи $a^2(a-3)<0$ т.е. $a^3-3a^2<0$, што значи сите собироци во заградите во последното равенство се негативни, а нивниот збир е 0, што е контрадикција. Јасно, не може да се најдат четири различни реални броеви со горенаведеното својство.

4. Во остроаголниот триаголникот ABC, точките E, F и G се подножјата на висините повлечени од темињата A, B и C, соодветно, а H е ортоцентарот на триаголникот. Ако $\overline{AB}=\overline{CH}$, докажи дека $P_{AGF}\cdot\overline{BC}^2+P_{BEG}\cdot\overline{AC}^2=P_{CFE}\cdot\overline{AB}^2$, каде што P_{AGF},P_{BEG} и P_{CFE} се плоштините на триаголниците AGF, BEG и CFE, соодветно.

Решение. Триаголниците ABF и HCF се складни (правоаголни се, имаат еднакви хипотенузи $\overline{AB}=\overline{CH}$ и $\angle ABF=\angle HCF=90°-\alpha$). Затоа $\overline{BF}=\overline{CF}$ и од правоаголниот триаголник CFB следува дека $\gamma=45°$ и $\angle CBF=45°$. Од тетивниот четириаголник $FGBC$ следува $\angle FGC=\angle FBC=45°$, а од тетивниот четириаголник $HGBE$ следува $\angle HGE=\angle HBE=45°$. Оттука $\angle FGE=90°$.

(Може веднаш да се искористи и фактот дека $\angle FGE=180°-2\gamma$ и $\angle FGH=90°-\gamma=\angle EGH$).

Од правоаголниот триаголник FGE следува $\overline{FG}^2+\overline{GE}^2=\overline{EF}^2$.



Од друга страна, $\angle AFG=90°-\angle GFB=90°-\angle GCB=\beta$ и $\angle GAF=\angle CAB=\alpha$, па ΔAGF е сличен со ΔACB. Слично, слични се ΔBEG и ΔBAC, како и ΔCFE и ΔCBA. Затоа важат следните односи на плоштините: $\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{GF}^2}{\overline{CB}^2}$, $\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{EG}^2}{\overline{AC}^2}$ и $\frac{P_{CFE}}{P_{ABC}}=\frac{\overline{FE}^2}{\overline{BA}^2}$, или ако изразиме $\overline{GF}^2=\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}\overline{CB}^2$, $\overline{EG}^2=\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}\overline{AC}^2$ и $\overline{FE}^2=\frac{P_{CFE}}{P_{ABC}}\overline{BA}^2$.

Ги заменуваме во равенството $\overline{FG}^2+\overline{GE}^2=\overline{EF}^2$ и добиваме $\frac{P_{AGF}}{P_{ABC}}\overline{CB}^2+\frac{P_{BEG}}{P_{ABC}}\overline{AC}^2=\frac{P_{CFE}}{P_{ABC}}\overline{BA}^2$.

Оттука директно следува $P_{AGF}\cdot\overline{BC}^2+P_{BEG}\cdot\overline{AC}^2=P_{CFE}\cdot\overline{AB}^2$.