



## ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА ИМО 2021

ДЕН 2

Недела, 30. Мај 2021

**Задача 4.** Нека  $S = \{1, 2, 3, \dots, 2021\}$  и  $f : S \rightarrow S$  е пресликување такво што  $f^{(n)}(n) = n$  за секој  $n \in S$ . Одредете ги сите можни вредности на  $f(2021)$ .

(Тука,  $f^{(n)}(n) = \underbrace{f(f(f \dots f(n)))}_{n \text{ пати}} \dots$ .)

**Задача 5.** Најдете ги сите функции  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  такви што за секои  $a, b \in \mathbb{N}$  се исполнети следните услови:

- (i)  $f(f(a) + b) \mid b^a - 1$ ;
- (ii)  $f(f(a)) \geq f(a) - 1$ .

**Задача 6.** Нека  $H$  е ортоцентарот на остроаголен триаголник  $ABC$  таков што  $AB < AC$ . Висините  $BH$  и  $CH$  ги сечат  $AC$  и  $AB$  во  $B_1$  и  $C_1$ , соодветно. Нека  $M$  е средишна точка на  $BC$ . Нека  $l$  е права паралелна со  $BC$  која поминува низ  $A$ . Опишаната кружница на  $\triangle CMC_1$  ја сече  $l$  во  $X$  и  $Y$ , така што  $X$  е на истата страна од  $AH$  како и  $B$ , додека  $Y$  е на истата страна од  $AH$  како и  $C$ . Правите  $MX$  и  $MY$  ја сечат  $CC_1$  во  $U$  и  $V$ , соодветно. Докажете дека опишаните кружници на  $\triangle MUV$  и  $\triangle B_1C_1H$  се допираат.

Време: 4 саати и 30 минути.  
Секоја задача вреди 7 поени.