64 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
8-9.05.2021

Прва година

1. Нека $S_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$. Покажи дека $S_0=S_1=0$, $S_2=1$ и $S_3=a+b+c$.

Решение. Да забележиме дека мора $a\neq b\neq c\neq a.$ Имаме:

$$S_0=\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-a)(b-c)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}=\frac{b-c-a+c+a-b}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0 \text{ и}$$

$$S_1=\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=\frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(a-c)(b-c)}=0.$$

Потоа,

$$S_2=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}\left[a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)\right].$$

Со разложување добиваме,

$$a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)=ab(a-b)-c\left(a^2+b^2\right)+c^2(a-b)=$$

$$=(a-b)\left(ab-ca-cb+c^2\right)=(a-b)\left[a(b-c)-c(b-c)\right]=(a-b)(a-c)(b-c).$$

Одовде, $S_2=1$. Слично, за S_3 добиваме

$$S_3=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=$$

$$=\frac{1}{(a-b)(a-c)(b-c)}\left[a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)\right]=\frac{ab\left(a^2-b^2\right)-c\left(a^3-b^3\right)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)\left[ab(a+b)-c\left(a^2+ab+b^2\right)+c^3\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)\left[a^2(b-c)+ab(b-c)-c\left(b^2-c^2\right)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=$$

$$=\frac{(a-b)(b-c)\left[a^2+ab-c(b+c)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{(a-b)(b-c)\left[(a-c)(a+c)+b(a-c)\right]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=a+b+c.$$

Ќе дадеме и втор начин за добивање на S_3. За произволно x, имаме $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc.$ Ако во ова равенство последователно замениме $x=a, x=b$ и $x=c$, добиваме

$$\begin{cases} a^3-(a+b+c)a^2+(ab+ac+bc)a-abc=0 \\ b^3-(a+b+c)b^2+(ab+ac+bc)b-abc=0 \\ c^3-(a+b+c)c^2+(ab+ac+bc)c-abc=0 \end{cases}.$$

Ако првото равенство го поделиме со $(a-b)(a-c)$, второто со $(b-a)(b-c)$ и третото со $(c-a)(c-b)$, а потоа ги собереме трите равенства, ќе добиеме дека $S_3-(a+b+c)S_2+(ab+ac+bc)S_1-abcS_0=0$. Со замена на претходните вредности на S_0,S_1 и S_2, добиваме дека $S_3=a+b+c$.

2. На колку начини може бројот $\frac{2020}{2021}$ да се запише како производ на две дропки од обликот $\frac{n}{n+1}$, каде $n\in\mathbb{N}$. Образложи го одговорот!

Решение. Нека $n,m\in\mathbb{N}$, така што $\frac{2020}{2021}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{m}{m+1}$. Од тука имаме дека $2020(n+1)(m+1)=2021nm$, односно $2020(n+m+1)=nm$. Ако го изразиме n ќе добиеме

$$n=\frac{2020(m+1)}{m-2020}=\frac{2020(m-2020)+2020\cdot 2021}{m-2020}=2020+\frac{2020\cdot 2021}{m-2020}.$$

Бидејќи $n,m\in\mathbb{N}$, тогаш мора $m-2020$ да е позитивен делител на $2020\cdot 2021$ и на секој делител на $2020\cdot 2021$ одговара точно еден пар (n,m). Бидејќи, $2020\cdot 2021=2^2\cdot 5\cdot 43\cdot 47\cdot 101$, бројот на делители на $2020\cdot 2021$ е $3\cdot 2^4=48$. Значи, постојат 48 начини на запишување на бројот $\frac{2020}{2021}$ како производ на две дропки од дадениот облик.

3. Одреди ги сите реални броеви x за кои важи $\{x\}=\frac{x+[x]+(x)}{10}$, каде $[x]$ е најголемиот цел број не поголем од x, $\{x\}=x-[x]$ и $(x)=[x+\frac{1}{2}]$.

Решение. Го заменуваме равенството $x=[x]+\{x\}$ во даденото равенство и добиваме $10\{x\}=[x]+\{x\}+[x]+(x)$, односно $9\{x\}-2[x]-(x)=0$. (1)

Да забележиме дека $\{x\}\in[0,1)$. Сега го запишуваме во поинаква форма бројот $(x)=[x+\frac{1}{2}]=[[x]+\{x\}+\frac{1}{2}]$ и разгледуваме два случаја:

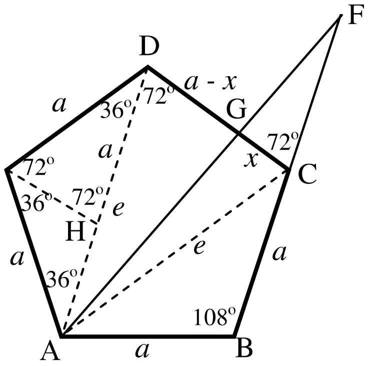
1) Ако $\{x\}\in[0,\frac{1}{2})$, тогаш $(x)=[x]$, па со замена во (1) добиваме $9\{x\}-3[x]=0$, односно $[x]=3\{x\}\in[0,\frac{3}{2})$. Добиваме две решенија $[x]_1=0$ и $[x]_2=1$, соодветно $\{x\}_1=0$ и $\{x\}_2=\frac{1}{3}$, значи двете решенија во овој случај се $x_1=0$ и $x_2=\frac{4}{3}$.

2) Ако $\{x\}\in[\frac{1}{2},1)$, тогаш $(x)=[x]+1$, па со замена во (1) добиваме $9\{x\}-3[x]-1=0$, односно $[x]=3\{x\}-\frac{1}{3}\in[\frac{7}{6},\frac{8}{3})$. Од тука добиваме трето решение $[x]_3=2$, соодветно $\{x\}_3=\frac{7}{9}$, па третото решение е $x_3=\frac{25}{9}$.

Значи, реалните броеви за кои важи даденото равенство се 0, $\frac{4}{3}$ и $\frac{25}{9}$.

4. Страната $\overline{BC}=a$ на правилниот петаголник $ABCDE$ е продолжена низ темето C до точката F така што $\overline{CF}=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Изрази ја должината на отсечката $\overline{AF}$ со помош на должината на страната a.

Решение.



Означуваме со $d=\overline{CF}=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Нека пресекот на AF и CD е точката G. Нека $\overline{CG}=x$, тогаш $\overline{GD}=a-x$ и нека $\overline{AD}=e$.

Од сличноста $\Delta DAG\sim\Delta CFG$ важи пропорцијата $e:(a-x)=d:x$, од каде $x=\frac{ad}{e+d}$. (1)

Означуваме точка H на дијагоналата AD така што $\overline{DH}=a$, па тогаш $\overline{AH}=e-a$.

Од сличноста $\Delta ADE\sim\Delta EAH$ имаме $e:a=a:(e-a)$, од каде $e(e-a)=a^2$. (2)

Ќе покажеме дека отсечката AF ја преполовува страната CD, а за ова да е точно, доволно е да покажеме дека $e=d$. Да забележиме дека за $d=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$ имаме

$$d(d-a)=\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}\left(\frac{a(1+\sqrt{5})}{2}-a\right)=\frac{a^2(1+\sqrt{5})^2}{4}-\frac{a^2(1+\sqrt{5})}{2}=$$

$$=\frac{a^2(1+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5})}{4}=a^2.$$

Сега, од последното равенство и од (2) имаме $e(e-a)=d(d-a)$, од каде $(d-e)(d+e-a)=0$. Да забележиме дека $d>a$ и $e>a$, па не може $d+e-a=0$, значи останува $d-e=0$, односно $d=e$. Од $d=e$ и сличноста $\Delta DAG\sim\Delta CFG$, следи складноста $\Delta DAG\cong\Delta CFG$. Оттука заклучуваме дека отсечката AF ја преполовува страната CD.

Бидејќи отсечката AF ја преполовува страната CD, важи и $\Delta DGA\cong\Delta CGA$ (од $\overline{DA}=\overline{CA}=e$, $\sphericalangle ADG=\sphericalangle ACG=72°$ и $\overline{DG}=\overline{CG}=\frac{a}{2}$), од каде добиваме дека $AF\perp CD$. Ја применуваме Питагоровата теорема на правоаголниот триаголник AGD и добиваме

$$\overline{AG}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DG}^2}=\sqrt{\frac{a^2(1+\sqrt{5})^2}{4}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2-1}=\frac{a}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Од $\Delta DAG\cong\Delta CFG$ имаме дека $\overline{AG}=\overline{GF}$, па бараната должина е $\overline{AF}=2\overline{AG}=a\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.