



ИЗБОРЕН НАТПРЕВАР ЗА ИМО 2021

ДЕН 1

Сабота, 29. Мај 2021

Задача 1. Нека $k \in \mathbb{N}$ задоволува $2 \leq k \leq 2020$. Нека $a_1, a_2, \dots, a_{2021}$ е монотono опаѓачка низа од ненегативни реални броеви така што

$$\sum_{i=n}^{2021} a_i \leq ka_n$$

за секој $n = 1, 2, \dots, 2021$. Докажете дека $a_{2021} \leq 4\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{2021} a_1$.

Задача 2. Нека ABC е остроаголен триаголник таков што $AB < AC$. Нека A' е слика на A при осна симетрија во однос на BC . Опишаната кружница на $\triangle A'BC$ ги сече полуправите AB и AC по втор пат во точки D и E соодветно, така што B е помеѓу A и D , а E е помеѓу A и C . Да ги означиме со P, Q и S средишните точки на отсечките CD, BE и BC , соодветно. Докажете дека правите BC и AA' се сечат на опишаната кружница на $\triangle PQS$.

Задача 3. За група луѓе велиме дека е *добра* доколку секој член има парен број (вклучително нула) познаници во групата (познанствата се обострани). Докажете дека секоја група луѓе може да се разбие на два добри дела (дозволено е некој од деловите да биде празен).

Време: 4 саати и 30 минути.

Секоја задача вреди 7 поени.