ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 119

Прва година

1. Одреди ги сите парови природни броеви (a,b) за кои $a \le b$ и притоа важи

$$\left(a+\frac{6}{b}\right)\left(b+\frac{6}{a}\right)=25.$$

Решение. Дадената равенка ја запишуваме во облик $ab+\frac{36}{ab}+12=25$. Множејќи со ab добиваме $(ab)^2-13ab+36=0$. Разложуваме на следниот начин $(ab)^2-4ab-9ab+36=0 \quad \Leftrightarrow \quad ab(ab-4)-9(ab-4)=0$, т.е. $(ab-4)(ab-9)=0$.
Оттука, $ab=4$ или $ab=9$. Имајќи предвид дека $a,b\in\mathbb{N}$ и $a\le b$, имаме:
- ако $ab=4$, тогаш $(a,b)=(1,4)$ или $(a,b)=(2,2)$;
- ако $ab=9$, тогаш $(a,b)=(1,9)$ или $(a,b)=(3,3)$.

Со проверка добиваме дека сите четири пара природни броеви се решенија на дадената равенка.

2. Најди ги сите линеарни функции од облик $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ кои ги задоволуваат условите $f(f(3))=3\cdot f(3)$ и $f(f(4))=4\cdot f(4)$.

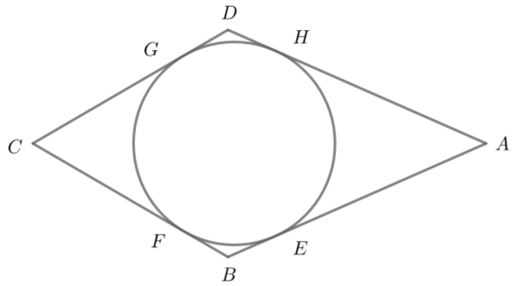
Решение. Нека $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.
Тогаш, од условот $f(f(3))=3\cdot f(3)$ добиваме
$af(3)+b=3(3a+b) \quad \Leftrightarrow \quad a(3a+b)+b=9a+3b$, т.е. $3a^2+ab=9a+2b$. ....(1)
Важи и условот $f(f(4))=4\cdot f(4)$, па имаме
$af(4)+b=4(4a+b) \quad \Leftrightarrow \quad a(4a+b)+b=16a+4b$, т.е. $4a^2+ab=16a+3b$. .....(2)
Со одземање на равенството (1) од равенството (2) добиваме $a^2=7a+b$, т.е. $b=a^2-7a$. Заменувајќи сега во (1) имаме

$$3a^2+a(a^2-7a)=9a+2(a^2-7a),$$
$$3a^2+a^3-7a^2=9a+2a^2-14a,$$
$$a^3-6a^2+5a=0.$$

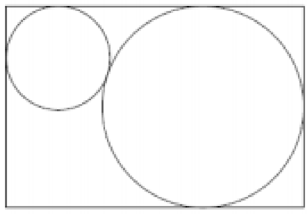
Левата страна на равенката ја разложуваме на множители и добиваме $a(a-1)(a-5)=0$, а оттука $a=0$ или $a=1$ или $a=5$. Тогаш соодветно $b=0$, $b=-6$ или $b=-10$. Следува дека бараните функции се $f(x)=0$, $f(x)=x-6$ и $f(x)=5x-10$.

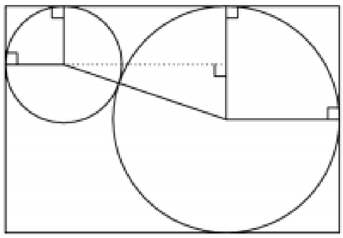
3. За тангентен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB}=\overline{AD}$. Докажи дека и $\overline{BC}=\overline{CD}$.

Решение. Нека $\overline{AB}=\overline{AD}$ и отсечките AB, BC, CD и DA се тангенти на кружницата со допирни точки E, F, G и H соодветно. Заради еднаквоста на тангентните отсечки повлечени од иста точка важи $\overline{AE}=\overline{AH}$, $\overline{BE}=\overline{BF}$, $\overline{CF}=\overline{CG}$ и $\overline{DG}=\overline{DH}$. Бидејќи $\overline{AB}=\overline{AD}$, имаме дека $\overline{AH}+\overline{DH}=\overline{AE}+\overline{BE}$. Но, $\overline{AE}=\overline{AH}$, па $\overline{DH}=\overline{BE}$. Исто така $\overline{DG}=\overline{DH}$ и $\overline{BE}=\overline{BF}$, па затоа $\overline{DG}=\overline{BF}$. Бидејќи $\overline{CF}=\overline{CG}$, следува дека $\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{CF}=\overline{DG}+\overline{CG}=\overline{CD}$, што требаше да се докаже.



4. Две кружници се впишани во правоаголник, се допираат меѓу себе од надвор и притоа едната од нив има радиус 3, а другата има радиус $r > 3$. Помалата кружница допира две соседни страни на правоаголникот, а поголемата допира 3 страни, како на цртежот. Познато е дека правоаголникот има плоштина $P = 98$ квадратни единици. Изрази ја плоштината на правоаголникот преку радиусот r на поголемата кружница.





Решение. Ги поврзуваме центрите на кружниците меѓу себе и уште ги поврзуваме центрите на кружниците со точките на допир на кружниците со страните на правоаголникот. Едната страна на правоаголникот е поделена на 3 делови со должини $3, \sqrt{(r+3)^2-(r-3)^2} = 2r\sqrt{3}$ и r (искористи Питагорова теорема).

Следува дека плоштината на правоаголникот, изразена преку радиусот r е

$$P = 2r\cdot(3+2r\sqrt{3}+r) = 2r(\sqrt{3}+\sqrt{r})^2 = 2\cdot(\sqrt{3r}+r)^2 \ .$$

Забелешка. Крајното решение за вредноста на r се добива со решавање на квадратна равенка. Од таа причина направена е мала корекција на текстот и за учениците од прва година, доволно е да се одговори плоштината на правоаголникот е $P = 2\cdot(\sqrt{3r}+r)^2$.

Втора година

1. Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $5x^2+ax-3=0$, а x_3 и x_4 се корени на равенката $x^2+4x-5=0$. Да се најдат вредностите на параметрите a и b ако се знае дека x_1+x_2 и x_3+x_4 се корени на равенката $10x^2+(7a+5b-20)x-112=0$.

Решение. Од Виетовите формули, за првите две равенки имаме: $x_1+x_2=-\dfrac{a}{5}$, $x_3+x_4=-4$, а за корените на равенката $10x^2+(7a+5b-20)x-112=0$ важи $(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=-\dfrac{7a+5b-20}{10}$, $(x_1+x_2)(x_3+x_4)=-4$. Заменувајќи ги првите две добиени релации добиваме систем равенки по параметрите a и b ,

$\begin{cases} \dfrac{a}{5}+4=\dfrac{7a+5b-20}{10} \\ \dfrac{4a}{5}=\dfrac{112}{10} \end{cases}$, чие решение е парот $(a,b)=(14,-2)$, односно бараните вредности за параметрите се $a=14, b=-2$.

2. Ако едниот корен на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ е еднаков на $n-$ тиот степен на другиот корен, пресметај ја вредноста на изразот $(ac^n)^{\frac{1}{n+1}}+(a^nc)^{\frac{1}{n+1}}+b$.

Решение. Нека $x_1=\beta$ е еден корен на дадената квадратна равенка, тогаш другиот корен има облик $x_2=\beta^n$. Од Виетовите формули имаме $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$. Сега имаме $\beta+\beta^n=-\frac{b}{a}$, од каде $b=-a\beta-a\beta^n$. Важи и $\beta^{n+1}=\frac{c}{a}$. Оттука ги наоѓаме вредностите за $c^n=a^n\cdot(\beta^{n+1})^n$ односно $a^n=\frac{c^n}{\beta^{(n+1)n}}$. Конечно за горниот збир добиваме

$$(ac^n)^{\frac{1}{n+1}}+(a^nc)^{\frac{1}{n+1}}+b=a\beta^n+\frac{c}{\beta^n}-a\beta-a\beta^n=a\beta-a\beta=0.$$

3. Реши ја во множеството реални броеви неравенката $\frac{1-2\sqrt{1-x^2}}{x}\le 1.$

Решение. Прво да забележиме дека $x\neq 0$ и $-1\le x\le 1$. Ќе разгледаме два случаи, за $0<x\le 1$ и $-1\le x<0$.
За $0<x\le 1$, дадената неравенка е еквивалентна со

$$1-2\sqrt{1-x^2}\le x \iff 1-x\le 2\sqrt{1-x^2} \iff (1-x)^2\le 4(1-x^2) \iff (1-x)\le 4(1+x),$$

од каде добиваме $x\ge -\frac{3}{5}$. Значи во првиот случај решение на неравенката е интервалот $(0,1]$.
За $-1\le x<0$, добиваме

$$1-2\sqrt{1-x^2}\ge x \iff 1-x\ge 2\sqrt{1-x^2} \iff (1-x)^2\ge 4(1-x^2) \iff (1-x)\ge 4(1+x),$$

од каде добиваме $x\le -\frac{3}{5}$. Значи во вториот случај решение на неравенката е интервалот $[-1,-\frac{3}{5}]$.

Конечно се добива решението на дадената неравенка $[-1,-\frac{3}{5}]\cup(0,1]$.

4. Реши ја во множеството реални броеви равенката $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=x.$

Решение. Јасно е дека $x>0$, уште повеќе $x\geq 1$. Воведуваме смени $a=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$ и $b=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$. Добиваме систем равенки $\begin{cases} a+b=x \\ a^2-b^2=x-1 \end{cases}$. Сега директно следува дека $a-b=1-\frac{1}{x}$. Значи системот го трансформираме во $\begin{cases} a+b=x \\ a-b=1-\frac{1}{x} \end{cases}$, од каде добиваме $2a=x+1-\frac{1}{x}=a^2+1$. Сега е јасно дека единственото решение за a е $a=1$. Конечно, од $x-\frac{1}{x}=1$ добиваме квадратна равенка $x^2-x-1=0$ која има решенија $x_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, кои се и решенија на почетната равенка.

Трета година

1. Да се пресмета вредноста на изразот $1+\cos^2 x+\cos^4 x$ ако се знае дека важи $\sin x+\sin^2 x=1$.

Решение. Од $\sin x+\sin^2 x=1$ се добива $\sin x=\cos^2 x.$ Тогаш $\sin^2 x=\cos^4 x,$ од каде, користејќи го основното тригонометриско равенство се добива $\cos^2 x+\cos^4 x=1,$ односно $1+\cos^2 x+\cos^4 x=2.$

2. Ако $\sin x+\cos x=a$, докажи дека $\sin^5 x+\cos^5 x=\frac{a}{4}\left(5-a^4\right)$.

Решение. Ако го квадрираме равенството $\sin x+\cos x=a$ имаме $\sin x\cos x=\frac{a^2-1}{2}$. Со квадрирање пак на последново добиваме $\sin^2 x\cos^2 x=\frac{a^4-2a^2+1}{4}$. Ако равенството $\sin x+\cos x=a$ го степенуваме на трети степен, ќе се добие $\sin^3 x+\cos^3 x=a^3-3\sin x\cos x\left(\sin x+\cos x\right)$ што со замена на добиените изрази станува $\sin^3 x+\cos^3 x=a^3-\frac{3a\cdot\left(a^2-1\right)}{2}$. Значи важи $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{a\left(3-a^2\right)}{2}$. Последново равенство ќе го помножиме со $\sin^2 x+\cos^2 x$ и добиваме $\sin^5 x+\cos^5 x+\sin^2 x\cos^2 x\left(\sin x+\cos x\right)=\frac{a\left(3-a^2\right)}{2}$, од каде $\sin^5 x+\cos^5 x=\frac{a\left(3-a^2\right)}{2}-\frac{a\left(a^4-2a^2+1\right)}{4}$. Конечно, $\sin^5 x+\cos^5 x=\frac{a}{4}\left(5-a^4\right)$.

3. Докажи дека за секоја вредност на x од множеството $\mathbb{R}\setminus\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ важи неравенството $9\cos^2 x-\mathrm{ctg}^2 x\leq 4.$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со $9\cos^2 x - \mathrm{ctg}^2 x - 4 \le 0.$ Заради дефиниционата област на функцијата $\mathrm{ctg}x$ мора да важи $x \ne k\pi, k \in \mathbb{Z}$ па последното неравенство може да го помножиме со $\sin^2 x.$ Тогаш добиваме

$$9\cos^2 x - \mathrm{ctg}^2 x - 4 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x + 4\sin^2 x - 9\cos^2 x \sin^2 x \ge 0,$$

а последното неравенство, по замената $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$ е еквивалентно со $\left(3\sin^2 x - 1\right)^2 \ge 0.$

4. Реши ја неравенката $3^y - 3\cos x + \sqrt{y - 2x^2 - 1} \le 0$.

Решение. Од тоа што $y - 2x^2 - 1 \ge 0$ следува дека $y \ge 2x^2 + 1$ оодносно $y \ge 1$. Значи $3^y \ge 3$. Од неравенството $\cos x \le 1$ добиваме $-3\cos x \ge -3$. Од двете изведени неравенства може да се заклучи дека $3^y - 3\cos x + \sqrt{y - 2x^2 - 1} \ge 3 - 3 + 0 = 0$. По условот на задачата треба $3^y - 3\cos x + \sqrt{y - 2x^2 - 1} \le 0$ што значи дека единствено можно е изразот $3^y - 3\cos x + \sqrt{y - 2x^2 - 1} = 0.$ Ова е можно само во случај кога во искористените неравенства важи знакот за равенство, па $3^y = 3, -3\cos x = -3$ и $\sqrt{y - 2x^2 - 1} = 0$. Со решавање се добива $y = 1$ и $x = 0$ што е решение и на почетната неравенка.

Четврта година

1. Дадена е равенката $\frac{1}{|x-2|} = \frac{1}{|x-52a|}$, каде што a е реален параметар. Реши ја равенката. Потоа докажи дека решенијата на равенката се сложени броеви ако параметарот a е квадрат на прост број.

Решение. а) Равенката не е дефинирана за $x = 2$ и $x = 52a$. Со квадрирање на равенката се ослободуваме од знакот за апсолутна вредност, односно од $\frac{1}{|x-2|^2} = \frac{1}{|x-52a|^2}$ добиваме $\frac{1}{(x-2)^2} = \frac{1}{(x-52a)^2}$, а оттука $(x-52a)^2 = (x-2)^2$. Последниот израз го трансформираме до облик $(26a-1)x = (26a-1)(26a+1)$.

- Ако $26a - 1 \ne 0$, т.е. $a \ne \frac{1}{26}$, тогаш равенката има единствено решение $x = 26a + 1,\ a \in \mathbb{R}.$

- Ако $26a - 1 = 0$, т.е. $a = \frac{1}{26}$, тогаш равенката добива облик $0 \cdot x = 0$, па секој $x \ne 2$ е решение на дадената равенка.

б) Нека $a = p^2$, каде што p е прост број. Да ги разгледаме решенијата на равенката во првиот случај. Во вториот случај a не е квадрат на прост број.

- Ако $p = 2$, тогаш $x = 26 \cdot 2^2 + 1 = 105$ и 105 е сложен број.

- Ако $p = 3$, тогаш $x = 26 \cdot 3^2 + 1 = 235$ и 235 е сложен број.

- Нека $p > 3$. Секој прост број поголем од 3 може да се запише во еден од облиците $p = 3k + 1$ или $p = 3k - 1$.

- Ако $p = 3k + 1$, тогаш

$$x = 26 \cdot (3k+1)^2 + 1 = 26 \cdot (9k^2 + 6k + 1) + 1 =$$
$$= 234k^2 + 156k + 27 = 3 \cdot (78k^2 + 52k + 9)\ .$$

- Ако $p = 3k - 1$, тогаш

$$x = 26 \cdot (3k-1)^2 + 1 = 26 \cdot (9k^2 - 6k + 1) + 1 =$$
$$= 234k^2 - 156k + 27 = 3 \cdot (78k^2 - 52k + 9)\ .$$

И во двата случаи бројот x е делив со 3, па е сложен број. Значи ако a е квадрат на прост број, тогаш решенијата на равенката се сложени броеви.

2. Најди функција $f(x)$ за која важи $f\left(\frac{20-12x}{16}\right) + 2f\left(\frac{3x-5}{4}\right) = 3x+1.$

Решение. Ако ставиме замена $\frac{3x-5}{4} = t,$ тогаш $x = \frac{4t+5}{3},$ па според условот од задачата добиваме $f(-t) + 2f(t) = 4t + 6.$

Ако пак ставиме замена $\frac{5-3x}{4} = t,$ тогаш $x = \frac{-4t+5}{3},$ па според условот од задачата добиваме $f(t) + 2f(-t) = -4t + 6.$

Сега, од $f(-t) + 2f(t) = 4t + 6$ и $f(t) + 2f(-t) = -4t + 6$ се добива $f(t) = 4t + 2,$ односно $f(x) = 4x + 2.$

3. Најди ги сите функции $f(x) = \frac{47}{ax+b}$, каде што a и b се цели броеви, $a > 0$, такви што $f(4)$ и $f(7)$ се цели броеви.

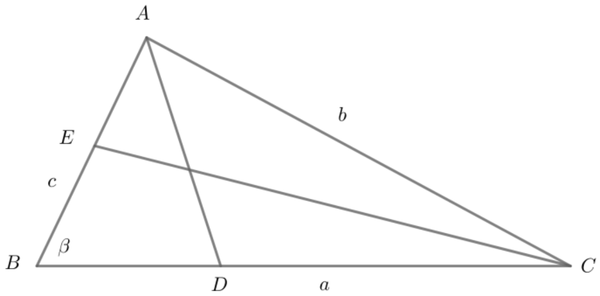
Решение. Бидејќи $f(4) = \frac{47}{4a+b}$ и $f(7) = \frac{47}{7a+b}$ се цели броеви и 47 е прост број, секој од броевите $4a+b$ и $7a+b$ мора да бидат еднакви на еден од броевите –1, 1, –47 или 47. За разликата на броевите $7a+b$ и $4a+b$, добиваме дека бројот $7a+b-(4a-b) = 3a$, кој е позитивен, мора да биде еден од броевите 2, 46, 48 или 94. Единствена можност a да биде цел број е $3a = 48$, кој се добива кога $4a+b = -1$ и $7a+b = 47$ или $4a+b = -47$ и $7a+b = 1$. Сега, за $a = 16$, првите две равенки се исполнети за $b = -65$, а вторите две за $b = -111$. Тогаш бараните функции се $f(4) = \frac{47}{16x-65}$ и $f(7) = \frac{47}{16x-111}$.

4. Во триаголникот ABC симетралата на аголот во темето A ја сече страната BC во точка D, а симетралата на аголот во темето C ја сече страната AB во точка E. Аголот во темето B е поголем од 60^{O}. Докажи дека $\overline{AE} + \overline{CD} < \overline{AC}$.

Решение. Согласно стандардните ознаки за елементите на триаголник нека $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ и $\overline{AC} = b$. Според условот во задачата $\beta > 60^{\mathrm{O}}$, па оттука $\cos\beta < \cos 60^{\mathrm{O}} = \frac{1}{2}$ ($\cos x$ е опаѓачка функција на $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$). Од косинусната теорема за $\cos\beta$ имаме $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} < \frac{1}{2}$, односно $a^2 + c^2 < ac + b^2$. На двете страни на ова неравенство додаваме $ab + bc$ и добиваме $ab + bc + a^2 + c^2 < ab + bc + ac + b^2$.

Со групирање на собироците добиваме $c(b+c)+a(a+b)<a(b+c)+b(b+c)$, односно $c(b+c)+a(a+b)<(a+b)(b+c)$.

Ако поделиме со $(a+b)(b+c)\neq 0$ добиваме $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}<1$, односно $\frac{bc}{a+b}+\frac{ba}{b+c}<b$.



Според теоремата за односот во кој симетралата на аголот ја дели спротивната страна имаме $\overline{AE}=\frac{bc}{a+b}$ и $\overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$.

Навистина, важи $\frac{b}{\overline{AE}}=\frac{a}{\overline{BE}}$, односно $b\overline{BE}=a\overline{AE}$. Бидејќи $\overline{AE}+\overline{BE}=c$, од $\overline{BE}=c-\overline{AE}$ добиваме $b(c-\overline{AE})=a\overline{AE}$. Јасно $\overline{AE}=\frac{bc}{a+b}$. На истиот начин, од $\frac{b}{\overline{CD}}=\frac{c}{\overline{BD}}$ и $\overline{CD}+\overline{BD}=a$, добиваме $b\overline{BD}=c\overline{CD}$ и $\overline{BD}=a-\overline{CD}$. Оттука $b(a-\overline{CD})=c\overline{CD}$, односно $\overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$.

Со директна замена во неравенството следува дека $\overline{AE}+\overline{CD}<\overline{AC}$.

Подготвиле:
Анета Гацовска-Барандовска
Emin Durmishi
Erblina Zeqiri
Јасмина Маркоска
Зоран Штерјов