РЕШЕНИЈА
РУБРИКА ЗАДАЧИ СИГМА 119

1591. Колку е збирот на нулите на функцијата $f\left(x\right)=x^4-6x^3+13x^2-14x+6$?

Решение. Збирот на коефициентите на оваа функција е 0. Ова значи, една од нулите на функцијата е 1, така што еден од факторите е (x-1). Да ја напишеме функцијата на следниот начин:

$$f(x)=(x-1)(ax^3+bx^2+cx+d)$$

Можеме да ги најдеме a, b, c и d ако користиме синтетичко делење на полином со полином или Хорнерова шема.

коефициенти на $x^4-6x^3+13x^2-14x+6$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -6 & 13 & -14 & 6\\
 & & 1 & -5 & 8 & -6\\ \hline
 & 1 & -5 & 8 & -6 & 0
\end{array}$$

коефициенти на функција - започнува со x^3 остаток

Нашата функција сега изгледа вака: $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x^3-5x^2+8x-6\right)$.

Делителите на константниот член -6 се $\pm1,\pm2,\pm3$ и ±6. Можеме да ја најдеме и втората нула од оригиналната функција со пробување на секој од овие делители. Втората нула е 3. Сега повторно ќе ја искористиме Хорнерова шема.

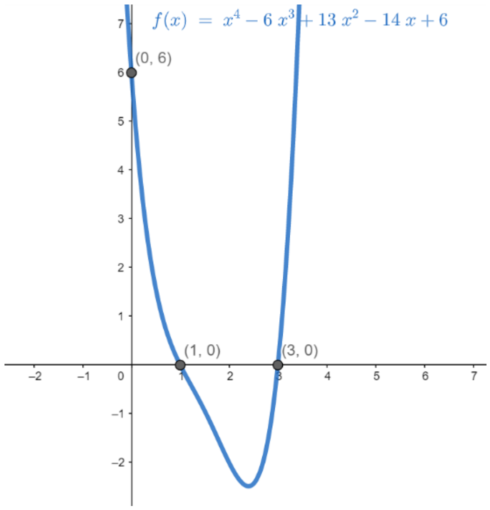
коефициенти на x^3-5x^2+8x-6

$$\begin{array}{r|rrrr}
3 & 1 & -5 & 8 & -6\\
 & & 3 & -6 & 6\\ \hline
 & 1 & -2 & 2 & 0
\end{array}$$

коефициенти на функција- започнува со x^2 остаток

Нашата функција сега го добива следниот облик: $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-3\right)\left(x^2-2x+2\right)$.

Последниот трином $\left(x^2-2x+2\right)$, нема нула $\left(\Delta<0\right)$. Графикот ни помага подобро да ги видиме нулите на функцијата. Може да користите DESMOS, GEOGEBRA или која било друга онлајн графичка алатка.



Па, кој е одговорот овде? 4? 4 би било точно ако се бараше само збирот на реалните корени. Но, прашањето е да го најдеме збирот на сите нули на функцијата и ова бара познавање на комплексните броеви. Да ги најдеме нулите на квадратната функција.

$f(x) = x^2 - 2x + 2$

$\Delta = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -4$

$x_{3,4} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2}, \quad x_3 = 1 + i, \;\; x_4 = 1 - i$

Конечно, збирот е $1 + 3 + 1 + i + 1 - i = 6$.

Постои многу полесен начин:

Можеме да ја изразиме функцијата од 4-ти степен како $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ каде a, b, c и d се четирите корени на функцијата. Да ги измножиме овие фактори;

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 14x + 6 = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 +$$
$$+ (ab + ac + ad + bc + bd + cd)x^2 - (abc + abd + acd + bcd)x + abcd$$

Ние го бараме збирот на нулите, а тоа е $a + b + c + d$. Оваа вредност можеме да ја видиме од проширената форма на $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$. Оваа сума е коефициент на x^3 и тоа е 6.

Одговор: 6

1592. Реши ја равенката $log_{\sqrt{2}}x + log_{\sqrt[4]{2}}x + log_{\sqrt[6]{2}}x + \ldots + log_{\sqrt[16]{2}}x = 36$

Решение. Да го најдеме доменот на функцијата.

x мора да биде поголем од нула. ($x > 0$). Да ги напишеме дадените логаритми со основа 2.

$$\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\sqrt[4]{2}} x + \log_{\sqrt[6]{2}} x + \ldots + \log_{\sqrt[16]{2}} x = 36$$

од својството на логаритмите $\left(\log_{a^m} x = \dfrac{1}{m} \log_a x \right)$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}}\log_2 x+\frac{1}{\frac{1}{4}}\log_2 x+\frac{1}{\frac{1}{6}}\log_2 x+\ldots+\frac{1}{\frac{1}{16}}\log_2 x=36$$

$$2\log_2 x+4\log_2 x+6\log_2 x+\ldots+16\log_2 x=36$$

$$\left(2+4+6+\ldots+16\right)\log_2 x=36 \iff \left(1+2+3+\ldots+8\right)\log_2 x=18$$

$$36\log_2 x=18 \iff \log_2 x=\frac{1}{2} \iff x=2^{\frac{1}{2}} \iff x=\sqrt{2}$$

Одговор: $x=\sqrt{2}$

1593. Најдете ги сите вредности на a, така што за секоја од нив, множеството решенија на неравенката $6x^2+4a^2+6ax-3x-24a+35<0$ да содржи барем еден цел број.

Решение. Да ја запишеме неравенката во однос на параметарот а:

$$4a^2+\left(6x-24\right)a+6x^2-3x+35<0\,.$$

Потребен и доволен услов за постоење на решенија е позитивноста на дискриминантата на квадратната равенка.

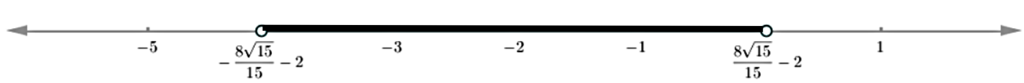
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$\Delta=\left(6x-24\right)^2-4\cdot4\cdot\left(6x^2-3x+35\right)>0 \iff \Delta=6^2\cdot\left(x-4\right)^2-16\cdot\left(6x^2-3x+35\right)>0$$

$$\Delta=36\cdot\left(x-4\right)^2-16\cdot\left(6x^2-3x+35\right)>0 \iff \Delta=9\cdot\left(x-4\right)^2-4\cdot\left(6x^2-3x+35\right)>0$$

$$\Delta=9x^2-72x+144-24x^2+12x-140>0$$

$$\Delta=-15x^2-60x+4>0 \iff \Delta=15x^2+60x-4<0$$

Оттука $x\in\left(-\frac{8\sqrt{15}}{15}-2,\frac{8\sqrt{15}}{15}-2\right)$.



Во пронајдениот интервал има вкупно 5 цели броеви. Тие се:
$x=-4,\ x=-3,\ x=-2,\ x=-1,\ x=0$.

Потребно е за секоја од овие вредности на x да ги најдеме соодветните вредности на параметарот а.

Ако $x=-4$, тогаш неравенката $4a^2+\left(6x-24\right)a+6x^2-3x+35<0$ добива форма

$4a^2-48a+143<0 \Leftrightarrow a\in\left(\frac{11}{2},\frac{13}{2}\right)$

Ако $x=-3$ добиваме $2a^2-21a+49<0 \Leftrightarrow a\in\left(\frac{7}{2},7\right)$

Ако $x=-2$ имаме $4a^2-36a+65<0 \Leftrightarrow a\in\left(\frac{5}{2},\frac{13}{2}\right)$

Ако $x=-1$, тогаш $2a^2-15a+22<0 \Leftrightarrow a\in\left(2,\frac{11}{2}\right)$

Ако $x=0$ добиваме $4a^2-24a+35<0 \Leftrightarrow a\in\left(\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$

Унијата на сите интервали го дава одговорот и тој е $a\in(2,7)$

Одговор: $a\in(2,7)$

1594. Решете го системот на равенки $\begin{cases} 9^{2tgx+\cos y}=3 \\ 9^{\cos y}-81^{tgx}=2 \end{cases}$

Решение. $\cos x$ мора да биде различно од нула. ($tgx=\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \cos x\neq 0$)

Да го запишеме дадениот систем како:

$\begin{cases} 81^{tgx}\cdot 9^{\cos y}=3 \\ 9^{\cos y}-81^{tgx}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 81^{tgx}\cdot 9^{\cos y}=3 \\ 9^{\cos y}=2+81^{tgx} \end{cases} \Rightarrow 81^{tgx}\cdot\left(2+81^{tgx}\right)=3$

$$\left(81^{tgx}\right)^2+2\cdot\left(81^{tgx}\right)-3=0$$

Оваа равенка ја решаваме како квадратна во однос на 81^{tgx}.

$$81^{tgx}=a, \Rightarrow a^2+2a-3=0 \quad \Rightarrow \quad \Delta=4-4(-3)=16$$

$$a_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}, \qquad a_1=1,\ a_2=-3$$

$81^{tgx}=-3$, па оваа равенка нема решение, или $81^{tgx}=1 \Rightarrow tgx=0, x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$

Сега, да го искористиме изразот $9^{\cos y}=2+81^{tgx}$ и да ја пресметаме вредноста на y.

$$9^{cos\, y}=2+81^{tgx}=2+1=3$$

$$3^{2\,cos\, y}=3^1, \Rightarrow 2\,cos\, y=1, \Rightarrow cos\, y=\frac{1}{2}, y=\pm\frac{\pi}{3}+2l\pi, l\in\mathbb{Z}$$

Одговор: $x = k\pi, y = \pm\frac{\pi}{3} + 2l\pi$ каде $k, l \in \mathbb{Z}$.

1595. Пресметајте ја максималната вредност на функцијата $y = \dfrac{1-\sqrt{x^2-2x+10}}{2x-x^2-9}$.

Решение. Да ставиме смена $x^2-2x+10=n$. Бидејќи $n = x^2-2x+10 = (x-1)^2+9$, тогаш $n>0$.
Од другата страна $2x-x^2-9 = -\left(x^2-2x+10\right)+1 = -n+1$.

Да ја напишеме повторно дадената функција. $y = \dfrac{1-\sqrt{n}}{1-n}$ или $y = \dfrac{1}{1+\sqrt{n}}$.

На најголемата вредност на функцијата y одговара најмалата вредност на n.

Знаејќи дека $n = (x-1)^2+9$, тогаш најмалата вредност е $n=9$ за $x=1$.

Затоа, максималната вредност на функцијата $y = \dfrac{1-\sqrt{x^2-2x+10}}{2x-x^2-9} = \dfrac{1-\sqrt{9}}{-8} = \dfrac{-2}{-8} = \dfrac{1}{4}$ за $x=1$.

1596. Најди ги сите прости броеви p и природни броеви a, b за кои $p^a + p^b$ е полн квадрат.

Решение. Ако $a=b$ тогаш $2\cdot p^a$ треба да биде полн квадрат, а тоа е можно ако $p=2$ и a е непарен број односно $a=2k+1, k\in\mathbb{N}$.

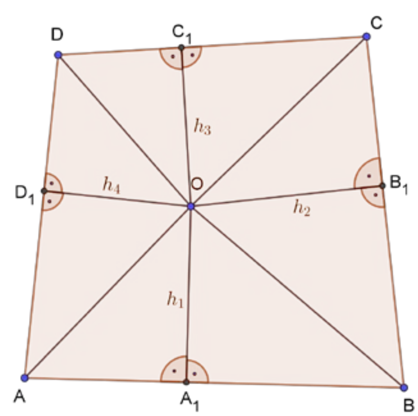
Ако $a\neq b$ тогаш без губење на општоста да претпоставиме дека $a<b$. Така добиваме дека $p^a\cdot(1+p^{b-a})$ треба да биде полн квадрат, па затоа мора a да е парен број и $1+p^{b-a}$ да биде полн квадрат. Нека $1+p^{b-a}=x^2$, $x\in\mathbb{N}$ тогаш $p^{b-a}=(x-1)(x+1)$. Значи, постојат броеви $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ за кои $p^m=x-1$, $p^n=x+1$ и $b-a=m+n$. Така добиваме дека $p^n-p^m=2$ односно $p^m\cdot(p^{n-m}-1)=2$.

Ако $p^m=1$, $p^{n-m}-1=2$ тогаш имаме $p=3$, $m=0$, $n=1$, односно $p=3$, $a=2k$, $b=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$.

Ако $p^m=2$, $p^{n-m}-1=1$ тогаш имаме $p=2$, $m=1$, $n=2$, односно $p=2$, $a=2k$, $b=2k+3$, $k\in\mathbb{N}$.

1597. Нека O е внатрешна точка на конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина P таква што $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=2P$. Докажи дека $ABCD$ е квадрат со центар O.

Решение. Од правоаголниот триаголник AA_1O имаме $\overline{OA}^2=\overline{AA_1}^2+\overline{A_1O}^2=\overline{AA_1}^2+h_1^2$. Аналогно ги имаме равенствата $\overline{OA}^2=\overline{AD_1}^2+h_4^2$, $\overline{OB}^2=\overline{BA_1}^2+h_1^2$, $\overline{OB}^2=\overline{BB_1}^2+h_2^2$, $\overline{OC}^2=\overline{CB_1}^2+h_2^2$, $\overline{OC}^2=\overline{CC_1}^2+h_3^2$, $\overline{OD}^2=\overline{DC_1}^2+h_3^2$, $\overline{OD}^2=\overline{DD_1}^2+h_4^2$.



Од друга страна имаме

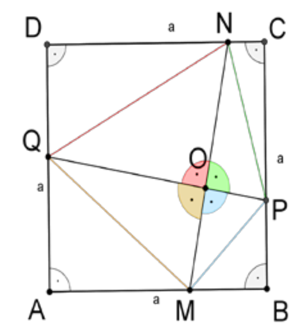
$4P = 2\overline{AA_1}\cdot h_1 + 2\overline{BA_1}\cdot h_1 + 2\overline{BB_1}\cdot h_2 + 2\overline{CB_1}\cdot h_2 + 2\overline{CC_1}\cdot h_3 + 2\overline{DC_1}\cdot h_3 + 2\overline{DD_1}\cdot h_4 + 2\overline{AD_1}\cdot h_4$ односно
$2(\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 + \overline{OD}^2) = 2\overline{AA_1}\cdot h_1 + 2\overline{BA_1}\cdot h_1 + 2\overline{BB_1}\cdot h_2 + 2\overline{CB_1}\cdot h_2 + 2\overline{CC_1}\cdot h_3 + 2\overline{DC_1}\cdot h_3 + 2\overline{DD_1}\cdot h_4 + 2\overline{AD_1}\cdot h_4$.
Даденото равенство се трансформира во равенството
$\left(\overline{AA_1} - h_1\right)^2 + \left(\overline{BA_1} - h_1\right)^2 + \left(\overline{BB_1} - h_2\right)^2 + \left(\overline{CB_1} - h_2\right)^2 + \left(\overline{CC_1} - h_3\right)^2 + \left(\overline{DC_1} - h_3\right)^2 + \left(\overline{DD_1} - h_4\right)^2 + \left(\overline{AD_1} - h_4\right)^2 = 0$.
Така добиваме дека $\overline{AA_1} = h_1, \overline{BA_1} = h_1, \overline{BB_1} = h_2, \overline{CB_1} = h_2, \overline{CC_1} = h_3, \overline{DC_1} = h_3, \overline{DD_1} = h_4, \overline{AD_1} = h_4$.

Значи осумте правоаголни рамнокраки триаголници се складни со остри агли од 45°, од каде добиваме дека точките A, O, C како и точките B, O, D се колинеарни.

Во четириаголникот $ABCD$ дијагоналите се заемно нормални, се преполовуваат и внатрешните агли се прави, па тој четириаголник е квадрат со центар во точката O.

1598. На секоја страна на квадратот $ABCD$ почнувајќи од $\overline{AB}$ последователно се избрани точките M, P, N, Q така што MN и PQ се взаемно нормални. Нека $MN \cap PQ = \{O\}$. Докажи дека $L_{AMOQ} + L_{CNOP} = L_{BPOM} + L_{DQON}$.

Решение. Нека $\overline{AB} = a$. Од Питагорова теорема за триаголниците AMQ и MOQ имаме $\overline{AM}^2 + \overline{AQ}^2 = \overline{MQ}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OQ}^2$ ...(1). На сличен начин добиваме дека $\overline{CP}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{NP}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{ON}^2$ ...(2), $\overline{BM}^2 + \overline{BP}^2 = \overline{MP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OP}^2$ ...(3), $\overline{DN}^2 + \overline{DQ}^2 = \overline{QN}^2 = \overline{ON}^2 + \overline{OQ}^2$ ...(4). Од равенствата (1) и (2) добиваме $\overline{AM}^2 + \overline{AQ}^2 + \overline{CP}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OP}^2 + \overline{ON}^2$ ...(5), а од равенствата (3) и (4) добибиваме
$\overline{BM}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{DN}^2 + \overline{DQ}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{OP}^2 + \overline{ON}^2 + \overline{OQ}^2$ ...(6). Со одземање на равенствата (5) и (6) имаме
$\overline{AM}^2 - \overline{BM}^2 + \overline{AQ}^2 - \overline{DQ}^2 + \overline{CP}^2 - \overline{BP}^2 + \overline{CN}^2 - \overline{DN}^2 = 0$ односно
$a\cdot\left(\overline{AM} - \overline{BM}\right) + a\cdot\left(\overline{AQ} - \overline{DQ}\right) + a\cdot\left(\overline{CP} - \overline{BP}\right) + a\cdot\left(\overline{CN} - \overline{DN}\right) = 0$. Ако го поделиме последното равенство со $a \neq 0$ добиваме дека
$\overline{AM} + \overline{AQ} + \overline{CP} + \overline{CN} = \overline{BM} + \overline{BP} + \overline{DN} + \overline{DQ}$. Со додавање на должините на четирите отсечки $\overline{OM}, \overline{OP}, \overline{ON}, \overline{OQ}$ на двете страни во последното равенство добиваме дека



$\left(\overline{AM} + \overline{OM} + \overline{OQ} + \overline{AQ}\right) + \left(\overline{CP} + \overline{OP} + \overline{ON} + \overline{CN}\right) = \left(\overline{BM} + \overline{OM} + \overline{OP} + \overline{BP}\right) + \left(\overline{DN} + \overline{ON} + \overline{OQ} + \overline{DQ}\right)$ односно
$L_{AMOQ} + L_{CNOP} = L_{BPOM} + L_{DQON}$.

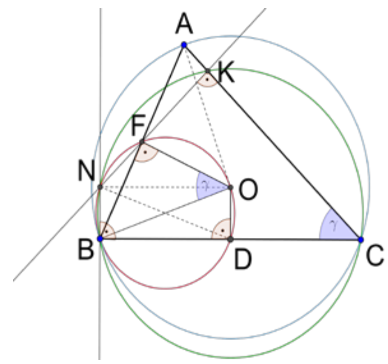
1599. Дадени се природните броеви a, b и c. Ако $\dfrac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c}$ е рационален број тогаш докажи дека $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c}$ е цел број.

Решение. Нека $\dfrac{a\sqrt{3} + b}{b\sqrt{3} + c} = \dfrac{p}{q}$ каде $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Така го добиваме равенството $(a\cdot q - b\cdot p)\cdot\sqrt{3} = c\cdot p - b\cdot q$. Од тоа што $\sqrt{3}$ е ирационален број имаме дека $a\cdot q - b\cdot p = c\cdot p - b\cdot q = 0$.

На тој начин ги имаме равенствата $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{p}{q}=\lambda$ од каде следува дека $b=\lambda\cdot c,\ a=\lambda^2\cdot c$. Сега,

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}=\frac{(\lambda^4+\lambda^2+1)\cdot c^2}{(\lambda^2+\lambda+1)\cdot c}=(\lambda^2-\lambda+1)\cdot c=\lambda^2\cdot c-\lambda\cdot c+c=a-b+c\in\mathbb{Z}.$$

1600. Нека ABC е остроаголен триаголник и точките D, F се средини на страните BC и AB, соодветно. Нека нормалата од F на AC и нормалата од B на BC се сечат во точката N. Докажи дека должината на отсечката $\overline{ND}$ е еднаква со радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC.



Решение. Нека O е центарот на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Од тоа што четириаголникот $BCKN$ е тетивен $(\angle CKN=\angle CBN=90^\circ)$ имаме дека $\angle BNF=\angle BNK=180^\circ-\gamma$ ...(1). Од друга страна имаме дека $\angle AOB=2\cdot\gamma$ како централен агол, па од складноста на триаголниците AOF и BOF следува $\angle FOB=\gamma$ ...(2). Од равенствата (1) и (2) имаме дека $\angle BNF+\angle FOB=180^\circ$. На тој начин добивме дека четириаголникот $BOFN$ е тетивен и може да се опише кружница со дијаметар $\overline{OB}$. Но, од тоа што $\angle ODB=90^\circ$ (правата OD е симетрала на отсечката $\overline{BC}$) следува дека точката D лежи на таа кружница. Од тоа што $\angle BNO=90^\circ$ добиваме дека четириаголникот $BDON$ е правоаголник, од каде следува еднаквост на дијагоналите. Значи, $\overline{ND}=\overline{OB}=R$.

1601. Докажи дека $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}$

Решение. Нека $z=\cos\frac{\pi}{5}+isin\frac{\pi}{5}$. Тогаш $z^5=cos\pi+isin\pi=-1$, односно $z^5+1=0$ или

$$(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)=0$$

Бидејќи $z+1\neq 0$ следува $z^4-z^3+z^2-z+1=0 \quad (*)$

Воедно од $z^5+1=0$ следува дека $z^6=-z$. Од друга страна пак имаме

$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{z^2+1}{2z}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)=\frac{z^6+1}{2z^3}$, од каде користејќи (*) добиваме

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}=\frac{z^2+1}{2z}+\frac{z^6+1}{2z^3}=\frac{z^4+z^2-z+1}{2z^3}=\frac{z^3}{2z^3}=\frac{1}{2}.$$

1602. Низата (a_n) е определена со $a_1=\frac{1}{2},\ \ a_{n+1}=a_n-a_n^2$. Докажи дека $a_{999}<\frac{1}{1000}$.

Решение. *Прв начин.*

Од $a_{n+1}=a_n-a_n^2$ се добива дека $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n(1-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{1-a_n}$

Оттука, $\frac{1}{a_{999}}=\frac{1}{a_{998}}+\frac{1}{1-a_{998}}=\frac{1}{a_{997}}+\frac{1}{1-a_{997}}+\frac{1}{1-a_{998}}=\cdots=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{1-a_1}+\frac{1}{1-a_2}+\cdots+\frac{1}{1-a_{998}}$.

Имајќи в предвид дека $a_{n+1}-a_{n=}-a_n^2<0$ што укажува дека низата опаѓа и е ограничена, т.е. $0<a_n<1$, добиваме дека $\frac{1}{1-a_n}>1$. Следува,

$$\frac{1}{a_{999}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{1-a_1} + \frac{1}{1-a_2} + \cdots + \frac{1}{1-a_{998}} > 2 + 998 = 1000.$$

Од овде заклучуваме дека $a_{999} < \frac{1}{1000}$.

Втор начин.

Ја формираме низата $b_n = \frac{1}{a_n} > 1$. Тогаш,

$$b_1 = 2,\ \ b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n - a_n^2} = \frac{1}{\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_n^2}} = \frac{b_n^2}{b_n - 1} = b_n + 1 + \frac{1}{b_n - 1} > b_n + 1.$$

Значи, $b_2 > b_1 + 1,\ b_3 > b_2 + 1, \dots\dots,\ \ b_n > b_{n-1} + 1$. Сумирајќи ги овие $n-1$ неравенки добиваме дека, $b_n > b_1 + (n-1) = n + 1$, па $b_{999} > 1000$, од каде $a_{999} < \frac{1}{1000}$.

1603. Некои членови од аритметичките прогресии $a_n = 4n + 13,\ \ b_n = 5n + 11,\ \ n \in \mathbb{N}$, се еднакви. Докажи дека збирот на првите p еднакви членови е еднаков на $p(10p + 11)$.

Решение. Од условот $a_n = b_m$ добиваме $4n + 13 = 5m + 11$, т.е. $n = \frac{5m-2}{4}$, $\quad n = m + \frac{m-2}{4}$.

Бидејќи n е природен број, следува дека $k = \frac{m-2}{4} \in \mathbb{N}$. Значи, $m = 4k + 2$, па општиот член на заедничкиот дел од низите е $x_k = 5m + 11 = 5(4k + 2) + 11 = 20k + 21,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Притоа, $x_k - x_{k-1} = 20$. Значи, (x_k) е аритметичка прогресија со прв член 21 и разлика 20. Првите p членови се добиваат за $k = 0,1,2, \dots, p-1$. За бараниот збир добиваме

$$S_p = \frac{p}{2}(42 + (p-1)\cdot 20) = \frac{p}{2}(20p + 22) = p(10p + 11).$$

1604. Функцијата f има својство да за произволно $x \in \mathbb{R}$ и фиксен број $a \in \mathbb{R}$ е исполнето равенството $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Докажи дека таа е периодична функција.

Решение. Од равенството $f(x+a) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ добиваме

$$f(x+2a) = f(x+a+a) = \frac{1+f(x+a)}{1-f(x+a)} = \frac{1 + \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = \frac{\frac{2}{1-f(x)}}{-\frac{2f(x)}{1-f(x)}} = -\frac{1}{f(x)}$$

$$f(x+3a) = f(x+2a+a) = \frac{1+f(x+2a)}{1-f(x+2a)} = \frac{1 - \frac{1}{f(x)}}{1 + \frac{1}{f(x)}} = \frac{f(x)-1}{f(x)+1},$$

$$f(x+4a) = f(x+3a+a) = \frac{1+f(x+3a)}{1-f(x+3a)} = \frac{1 + \frac{f(x)-1}{f(x)+1}}{1 - \frac{f(x)-1}{f(x)+1}} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Од произволноста на x добиваме дека функцијата е периодична со периода $4a$. Произволна функција $f: [0, a) \to \mathbb{R}$, која не прима вредност 1, може периодично да се продолжи (со период $4a$) на целата реална права.

1605. Во еден ред се наредени n бели и n црни жетони. Во еден потег два разнобојни жетони можат да си ги заменат местата, но само ако меѓу нив има најмногу $n-1$ други жетони. Кој е најмалиот број потези со кои, тргнувајќи од произволен распоред, белите жетони може да се разместат на првите n места, а црните жетони на преостанатите n места.

Решение. Нека во почетниот распоред црните жетони се наоѓаат на првите n места, а белите на последните n места. Јасно, тргнувајќи од овој распоред за да се добие саканиот распоред се потребни најмалку n потези (секој бел жетон треба да се премести).

Ќе докажеме дека тргнувајќи од произволен распоред, после најмногу n потези може да се добие саканиот распоред на жетоните.

Ако почетниот распоред е саканиот, тогаш се потребни 0 потези.

Нека постои црн жетон кој се наоѓа меѓу првите n жетони и нека најлевиот таков жетон се наоѓа на i – тото место ($i \geq 1$). Следните n жетони не може да бидат црни, т.е. некој од следните n жетони е бел. Но тогаш, меѓу тој бел и почетно избраниот црн жетон има најмногу $n-1$ други жетони, па можеме да ги земениме нивните места. Значи, во еден потег добиваме распоред во кој најлевиот црн жетон е десно од i –тото место ($i \geq 1$). Ако се добие саканиот распоред, тогаш постапката завршува после еден потег. Нека повторно постои црн жетон кој се наоѓа меѓу првите n жетони и нека најлевиот таков жетон е на i–тото место ($i \geq 2$).

Повторувајќи ја претходната постапка за црн жетон, после вкупно два потега, добиваме распоред во кој најлевиот црн жетон е десно од i – тото место ($i \geq 2$). Ако вака добиениот распоред е саканиот, тогаш постапката завршува после два потега.

Повторувајќи ја опишаната постапка, или саканиот распоред ќе го добиеме пред n – тиот потег или после $n-1$ потези. Меѓу првите n жетони ќе има црн жетон и тој ќе се наоѓа десно од (n–1)–вото место, т.е. ќе се наоѓа на n – тото место. Сега, со уште еден потег се добива саканиот распоред.

Подготвиле:
Јилмаз Деликташ
Раде Кренков
Слаѓан Станковиќ