Втор Меморијален Математички Натпревар

Александар Блажевски - Цане

Ден 2: Решенија и распределба на поени

Задача 4. Најдете ги сите природни броеви n што имаат точно $\sqrt{n+1}$ природни делители.

Решение. Секој природен број n може да се запише како $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, каде $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$ се простите делители на n; притоа, n има точно $\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$ различни природни делители. **(1 поен)**

Нека $\tau(n) = \sqrt{n+1}$. Ако n е парен, тогаш $\sqrt{n+1}$ е непарен, што повлекува дека сите α_i се парни, т.е., n е полн квадрат. Од друга страна, за $\sqrt{n+1}$ да биде цел број, потребно е $n+1$ да е полн квадрат. Бидејќи не постојат последователни природни броеви кои се полни квадрати, задачата нема решение помеѓу парните броеви. **(1 поен)**

Значи n е непарен, односно $p_i \geq 3$ за секој i. За $p_1 > 3$ би добиле противречност дека $\sqrt{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} + 1} > 2^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \cdots 2^{\alpha_k} \geq (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$. **(1 поен)**

Следствено, $p_1 = 3$. Доколку $\alpha_1 > 1$, од неравенството $3^{\alpha_1} \geq (\alpha_1+1)^2$ со горенаведеното резонирање повторно би добиле противречност. Значи, $\alpha_1 = 1$. **(1 поен)** Ако $p_k \geq 7$, тогаш (од $\alpha_k > 0$) би имале дека

$$\sqrt{3 \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k} + 1} > 2^{\alpha_2} \cdots 2^{\alpha_{k-1}} 2^{\alpha_k - 1} \sqrt{16} = 2 \cdot 2^{\alpha_2} \cdots 2^{\alpha_{k-1}} 2^{\alpha_k} \geq (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)\,.$$

(1 поен)

Заклучуваме дека сите решенија се помеѓу броевите од облик $n = 3 \cdot 5^{\alpha}$ (каде $\alpha \geq 0$). Непосредна проверка покажува дека $0 \leq \alpha \leq 1$ одговара, односно, $n = 3$ и $n = 15$ се две решенија на задачата. **(1 поен)** Всушност, ова се единствените решенија, со оглед на тоа дека за секој $\alpha \geq 2$ важи $\sqrt{3 \cdot 5^{\alpha} + 1} > \sqrt{75} \cdot 2^{\alpha-2} > 2^{\alpha+1} > 2(\alpha+1)$. **(1 поен)** $\square$

Задача 5. Нека O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, и нека симетралите на отсечките OA, OB и OC ги пресекуваат правите BC, CA и AB, соодветно, во точки D, E и F. Докажете дека D, E, F се колинеарни.

Прво решение. Нека K, L и M се пресечните точки на правите BC, CA и AB со тангентите на опишаната кружница за $\triangle ABC$ повлечени во A, B и C, соодветно. Применувајќи ја синусната теорема за триаголниците AMC, BMC, ALB, CLB, BKA и CKA ги добиваме овие равенства (a, b, c ги означуваат должините на страните на $\triangle ABC$):

$$\begin{aligned} |AM| &= b\cdot\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle AMC}\,, \quad |BM| = a\cdot\frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle BMC}\,, \quad |AL| = c\cdot\frac{\sin\angle ABL}{\sin\angle ALB}\,, \\ |CL| &= a\cdot\frac{\sin\angle CBL}{\sin\angle CLB}\,, \quad |BK| = c\cdot\frac{\sin\angle BAK}{\sin\angle BKA}\,, \quad |CK| = b\cdot\frac{\sin\angle CAK}{\sin\angle CKA}\,. \end{aligned}$$

(1 поен)

Нека A', B' и C' се средишни точки на отсечките AO, BO и CO, соодветно. Од правоаголните трапези $CMFC', BELB'$ и $AKDA'$ имаме (r е радиусот на опишаната кружница (ABC)):

$$|FM| = \frac{r}{2\sin\angle FMC}\,, \quad |EL| = \frac{r}{2\sin\angle ELB}\,, \quad |DK| = \frac{r}{2\sin\angle DKA}\,.$$

(1 поен)

Бидејќи правите AK, BL и CM се тангенти на кружницата (ABC), важи следното (каде што α, β, γ се големините на внатрешните агли CAB, ABC, BCA на $\triangle ABC$ во радиани):

$$\begin{aligned} \angle ACM, \angle CAK &\in \{\beta, \pi-\beta\}\,, \\ \angle ABL, \angle BAK &\in \{\gamma, \pi-\gamma\}\,, \\ \angle BCM, \angle CBL &\in \{\alpha, \pi-\alpha\}\,. \end{aligned}$$

(2 поени)

Ова ни овозможува да ги пресметаме односите $\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}, \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ and $\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}$, во кои се појавуваат должини со знак:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} &= \frac{\overline{AM}-\overline{FM}}{\overline{BM}-\overline{FM}} = \frac{b\cdot\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle AMC} - \frac{r}{2\sin\angle FMC}}{a\cdot\frac{\sin\angle BCM}{\sin\angle BMC} - \frac{r}{2\sin\angle FMC}} = \frac{2b\sin\beta - r}{2a\sin\alpha - r}\,, \\ \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} &= \frac{\overline{BK}-\overline{DK}}{\overline{CK}-\overline{DK}} = \frac{c\cdot\frac{\sin\angle BAK}{\sin\angle BKA} - \frac{r}{2\sin\angle DKA}}{b\cdot\frac{\sin\angle CAK}{\sin\angle CKA} - \frac{r}{2\sin\angle DKA}} = \frac{2c\sin\gamma - r}{2b\sin\beta - r}\,, \\ \frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} &= \frac{\overline{CL}-\overline{EL}}{\overline{AL}-\overline{EL}} = \frac{a\cdot\frac{\sin\angle CBL}{\sin\angle CLB} - \frac{r}{2\sin\angle ELB}}{c\cdot\frac{\sin\angle ABL}{\sin\angle ALB} - \frac{r}{2\sin\angle ELB}} = \frac{2a\sin\alpha - r}{2c\sin\gamma - r}\,. \end{aligned}$$

(1 поен)

Со множење на споменатите три односи добиваме:

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = -1\,.$$

Според добиеното равенство, обратната теорема на Менелај ни кажува дека точките D, E и F се колинеарни.

(2 поени)

□

Второ решение. Ќе дадеме решение со комплексни броеви. Како што е вообичаено, малите букви означуваат комплексни броеви (афикси) на точки именувани со соодветните големи букви. Без губење на општоста, претпоставуваме дека:

$$|a| = |b| = |c| = 1\,.$$

Оттука,

$$a\bar{a}=1, b\bar{b}=1, c\bar{c}=1\,,$$

односно

$$\bar{a}=\frac{1}{a}, \bar{b}=\frac{1}{b}, \bar{c}=\frac{1}{c}\,.$$

Користејќи дека d лежи на симетралата на AO, имаме:

$$|d-a|=|d|\,.$$

Следствено,

$$(d-a)(\bar{d}-\bar{a})=d\bar{d}$$
$$d\bar{d}-a\bar{d}-\bar{a}d+a\bar{a}=d\bar{d}$$
$$\bar{d}=\frac{a\bar{a}-\bar{a}d}{a}=\frac{a^2\bar{a}-a\bar{a}d}{a^2}=\frac{a-d}{a^2}\,.$$

(1 поен)

Од колинеарноста на точките D, B, C имаме:

$$\frac{d-b}{\bar{d}-\bar{b}}=\frac{d-c}{\bar{d}-\bar{c}}$$
$$(d-b)(\bar{d}-\bar{c})=(d-c)(\bar{d}-\bar{b})$$
$$d\bar{d}+b\bar{c}-b\bar{d}-\bar{c}d=d\bar{d}+c\bar{b}-d\bar{b}-c\bar{d}$$
$$d(\bar{b}-\bar{c})=\bar{d}(b-c)+c\bar{b}-b\bar{c}$$
$$d(b\bar{b}c-bc\bar{c})=bc\bar{d}(b-c)+b\bar{b}c^2-b^2c\bar{c}$$
$$d(c-b)=bc\bar{d}(b-c)+(c-b)(c+b)$$
$$d=b+c-bc\bar{d}=b+c-bc\frac{a-d}{a^2}$$
$$a^2d=a^2b+a^2c-abc+bcd$$
$$d=\frac{a^2b+a^2c-abc}{a^2-bc}\,.$$

(1 поен)

Така

$$\bar{d}=\frac{\bar{a}^2\bar{b}+\bar{a}^2\bar{c}-\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{a}^2-\bar{b}\bar{c}}=\frac{a^2\bar{a}^2\bar{b}bc+a^2\bar{a}^2bc\bar{c}-a^2bc\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{a^2\bar{a}^2bc-a^2b\bar{b}c\bar{c}}=\frac{c+b-a}{bc-a^2}\,.$$

Аналогно, добиваме

$$e=\frac{b^2c+b^2a-abc}{b^2-ac}$$
$$\bar{e}=\frac{a+c-b}{ac-b^2}$$
$$f=\frac{c^2a+c^2b-abc}{c^2-ab}$$
$$\bar{f}=\frac{a+b-c}{ab-c^2},.$$

(1 поен)

Доволно е да покажеме дека

$$\frac{d-e}{\bar{d}-\bar{e}}=\frac{d-f}{\bar{d}-\bar{f}}\,.$$

(1 поен)

Последното е еквивалентно со:

$$\left(\frac{a^2b+a^2c-abc}{a^2-bc}-\frac{b^2c+b^2a-abc}{b^2-ac}\right)\left(\frac{c+b-a}{a^2-bc}-\frac{a+b-c}{c^2-ab}\right)$$
$$=\left(\frac{a^2b+a^2c-abc}{a^2-bc}-\frac{c^2a+c^2b-abc}{c^2-ab}\right)\left(\frac{c+b-a}{a^2-bc}-\frac{a+c-b}{b^2-ac}\right)$$
$$\iff [(a^2b+a^2c-abc)(b^2-ac)-(b^2c+b^2a-abc)(a^2-bc)]\cdot$$
$$[(b+c-a)(c^2-ab)-(a+b-c)(a^2-bc)]$$
$$=[(a^2b+a^2c-abc)(c^2-ab)-(c^2a+c^2b-abc)(a^2-bc)]\cdot$$
$$[(b+c-a)(b^2-ac)-(a+c-b)(a^2-bc)]\,.$$

Да ги воочиме следните факторизации:

$$[(a^2b+a^2c-abc)(b^2-ac)-(b^2c+b^2a-abc)(a^2-bc)]$$
$$=(a^2b^3-a^3bc+a^2b^2c-a^3c^2-ab^3c+a^2bc^2-a^2b^2c+b^3c^2-a^3b^2+ab^3c+a^3bc-ab^2c^2)$$
$$=a^2b^3-a^3b^2-a^3c^2+a^2bc^2+b^3c^2-ab^2c^2=a^2b^2(b-a)+c^2(b^3-a^3)+abc^2(a-b)$$
$$(b-a)(a^2b^2+c^2(a^2+ab+b^2)-abc^2)=(b-a)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\,.$$

(1 поен)

Од причини на симетрија, важи и

$$[(a^2b+a^2c-abc)(c^2-ab)-(c^2a+c^2b-abc)(a^2-bc)]=(c-a)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)\,.$$

Аналогно,

$$[(b+c-a)(c^2-ab)-(a+b-c)(a^2-bc)]$$
$$=bc^2-ab^2+c^3-abc-ac^2+a^2b-a^3+abc-a^2b+b^2c+a^2c-bc^2$$
$$=-ab^2+c^3-ac^2-a^3+b^2c+a^2c=c^3-a^3+b^2(c-a)+ac(a-c)$$
$$=(c-a)[(a^2+ac+c^2+b^2-ac)]=(c-a)(a^2+b^2+c^2)\,.$$

(1 поен)

На сличен начин, заклучуваме дека

$$[(b+c-a)(b^2-ac)-(a+c-b)(a^2-bc)]$$
$$=(b-a)(a^2+b^2+c^2)\,.$$

Бидејќи

$$(b-a)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)(c-a)(a^2+b^2+c^2)$$
$$=(c-a)(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)(b-a)(a^2+b^2+c^2)\,,$$

точките D, E, F се колинеарни. **(1 поен)** □

Задача 6. Нека $\mathbb{R}^+$ е множеството позитивни реални броеви. Најдете ги сите функции $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ такви што за секои $x, y\in\mathbb{R}^+$ важи

$$f(x)f(y)=f(y)f(xf(y))+\frac{1}{xy}.$$

Решение. Ќе покажеме дека равенката за единствено решение ја има функцијата

(1) $$f(x)=1+\frac{1}{x}.$$

Непосредно се проверува дека оваа функција е навистина решение на равенката. **(1 поен)**

Дадениот услов е еквивалентнен со

$$f(xf(y)) = f(x) - \frac{1}{xyf(y)}. \tag{2}$$

Нека $a = f(1)$. Ставајќи $x = 1$ во (2), добиваме

$$f(f(y)) = a - \frac{1}{yf(y)}. \tag{3}$$

Комбинирајќи ги (2) и (3),

$$f(f(x)f(y)) = f(f(x)) - \frac{1}{f(x)yf(y)} = a - \frac{1}{xf(x)} - \frac{1}{f(x)yf(y)}. \tag{4}$$

Со заменување на улогите на x и y во (4), имаме

$$f(f(y)f(x)) = f(f(y)) - \frac{1}{f(y)xf(x)} = a - \frac{1}{yf(y)} - \frac{1}{f(y)xf(x)}. \tag{5}$$

Значи,

$$a - \frac{1}{xf(x)} - \frac{1}{f(x)yf(y)} = a - \frac{1}{yf(y)} - \frac{1}{f(y)xf(x)},$$

што е еквивалентно со

$$yf(y) + x = xf(x) + y.$$

(3 поени)

Оттука, $x - xf(x) = c$ за некоја константа c (што не зависи од x), т.е.,

$$f(x) = 1 - \frac{c}{x}.$$

(1 поен)

Бидејќи $f(1) = a$, важи $c = 1 - a$ и

$$f(x) = 1 - \frac{1-a}{x}. \tag{6}$$

Тогаш,

$$f(f(y)) = 1 - \frac{1-a}{f(y)}. \tag{7}$$

(1 поен)

Споредувајќи ги (3) и (7), и користејќи ја повторно (6), добиваме $(a-1)^2 = 1$. Од $a > 0$, заклучуваме дека $a = 2$ и оттука (1). **(1 поен)**

$\square$