СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

Втор Меморијален Математички Натпревар

Александар Блажевски - Цане

Ден 1

Сабота, 9. Јануари 2021

Задача 1. Даден е тетивен четириаголник $ABCD$ за кој $\overline{AB} = \overline{AD}$. Нека E и F се точки на страните BC и CD, соодветно, такви што $\overline{BE} + \overline{DF} = \overline{EF}$. Докажете дека $\angle BAD = 2\angle EAF$.

Задача 2. Даден е прост број p. Нека A е вистинско подмножество од $F = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ со следната особина:

$$\text{ако } a, b \in A, \text{ тогаш } ab + 1 \pmod{p} \in A\,.$$

Колку елементи може да има множеството A? (Одговорот да се образложи.)

Задача 3. За цел број $n \geq 3$, нека $\mathcal{C}_n$ е множеството од сите n-торки $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ од ненегативни реални броеви a_i, $i = 1, \ldots, n$ такви што $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. За секои $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ и $a \in \mathcal{C}_n$, нека $\sigma_k(a) = \{a_1 + \cdots + a_k, a_2 + \cdots + a_{k+1}, \ldots, a_{n-k+1} + \cdots + a_n\}$. Докажете дека:

(*a*) Постојат $m_k = \max\{\min \sigma_k(a) : a \in \mathcal{C}_n\}$ и $M_k = \min\{\max \sigma_k(a) : a \in \mathcal{C}_n\}$.

(*b*) Важи $1 \leq \sum_{k=1}^{n-1}(\frac{1}{M_k} - \frac{1}{m_k}) \leq n-2$. Притоа, на левата страна, равенство се достигнува само за конечно многу вредности на n, а на десната страна, равенство се достигнува за бесконечно многу вредности на n.

Време: 4 саати и 30 минути.
Секоја задача вреди 7 поени.