24. ЈУНИОРСКА МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

05.09.2020

1. Нека S е множеството од сите природни броеви n такви што секој од броевите $n+1$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ и $n+8$ е сложен. Одреди го најголемиот број k со својство: За секој $n \in S$ постојат барем k последователни сложени броеви во множеството

$$\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6, n+7, n+8, n+9\}.$$

(8 поени)

2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xy + yz + xz = 27$. Докажи дека важи неравенството

$$x + y + z \geq \sqrt{3xyz}.$$

Кога важи равенство?

(8 поени)

3. Во множеството на цели броеви реши ја равенката

$$x^5 + 2 = 3 \cdot 101^y.$$

(8 поени)

4. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AC. На страните AC и BC се избрани точки D и E, соодветно, така што $\overline{CD} = \overline{DE}$. Нека H, J и K се средини на DE, AE и BD, соодветно. Опишаната кружница околу триаголникот DHK ја сече AD во точка F, а опишаната кружница околу триаголникот HEJ ја сече BE во точка G. Правата низ K паралелна со AC ја сече AB во точка I. Нека $IH \cap GF = \{M\}$. Докажи дека J, M и K се колинеарни точки.

(8 поени)

5. Нека T е триаголник со темиња во точки со целобројни координати, таков што секоја страна на T содржи точно m точки со целобројни координати. Ако плоштината на T е помала од 2020, одреди ја најголемата можна вредност за m.

(8 поени)

Време за работа: 4.5 саати.