



**XLV ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНИТЕ УЧИЛИШТА  
22-23.08.2020 година**

**6 одделение**

1. Дедо Јордан и неговиот внук Иван имаат роденден на ист ден. Годишите на едниот и на другиот се пишуваат со истите цифри. “Разликата на нивните години е еднаква на бројот на твојата куќа”- му рече Марко на Петар. “Овој податок е доволен за еднозначно да се определат нивните години”- дополни Ѓорѓи. Петар потоа многу брзо пресмета колку години имаат Јордан и Иван. Колку се стари дедото и внукот?

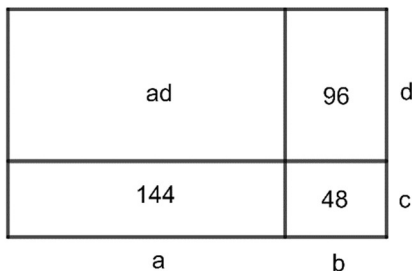
**Решение:** Очигледно е дека се бараат два двоцифрени броеви  $10a + b$  (годините на дедото) и  $10b + a$  (годините на внукот), каде  $a$  и  $b$  се цифри различни од 0 такви што  $a > b$ . Разликата меѓу годините на дедото и внукот изнесува  $9(a - b)$ . Бидејќи  $a$  и  $b$  се цифри различни од 0, значи нивната разлика може да биде 1,2,3,4,5,6,7 или 8. Познато е дека на Петар му е довошно што го знае бројот на својата куќа, па да ги пресмета  $a$  и  $b$ . Тоа значи дека разликата  $a - b$  еднозначно ги определува намаленикот и намалителот (земајќи предвид дека станува збор за ненулта цифри). Следи дека  $a - b = 8$ ,  $a = 9$  и  $b = 1$ . Навистина, во спротивно би постоеле барем две можности, па Петар не би можел да го одреди решението. (На пример, ако  $a - b = 6$ , тогаш можностите се  $9 - 3$  или  $8 - 2$  или  $7 - 1$ .) Оттука, иако не ја знаеме адресата на Петар, заклучуваме дека дедото Јордан има 91 година, а внукот Иван 19 години.

2. Михаил и Мартин истовремено тргнале кон училиштето. Чекорот на Михаил е за 10% пократок од чекорот на Мартин, но Михаил за исто време прави 10% повеќе чекори од Мартин. Кој од нив стигнал прв во училиште?

**Решение:** Нека должината на чекорот на Мартин е  $x$ . Тогаш, чекорот на Михаил е долг  $0,9x$ . Ако Мартин направил  $u$  чекори до училиштето, за тоа време Михаил би направил  $1,1u$  чекори. Се добива дека, додека Мартин поминал пат со должина  $x \cdot u$  и стигнал во училиштето, Михаил поминал пат со должина  $0,9x \cdot 1,1u = 0,99xu$ . Значи, Мартин стигнал прв до училиштето.

3. Еден квадрат е поделен со две прави на четири правоаголници. Колкава е страната на дадениот квадрат, ако се познати површините на три од четирите правоаголници кои што изнесуваат  $48 \text{ cm}^2$ ,  $96 \text{ cm}^2$  и  $144 \text{ cm}^2$ . Пресекот е направен така што двата поголеми од споменатите три правоаголници имаат само едно заедничко теме.

**Решение:** Нека ги означиме страните на правоаголникот како на сликата.



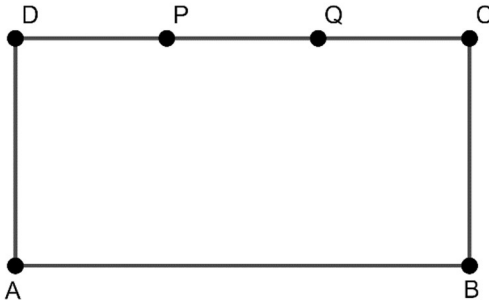
Тогаш,  $a \cdot c = 144 \text{ cm}^2$ ,  $b \cdot c = 48 \text{ cm}^2$  и  $b \cdot d = 96 \text{ cm}^2$ , но не знаеме колку е  $a \cdot d$ . Ги множиме првото и третото равенство и добиваме  $a \cdot c \cdot b \cdot d = 144 \cdot 96 \text{ cm}^4$ . Бидејќи  $b \cdot c = 48 \text{ cm}^2$  имаме



**XLV ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНИТЕ УЧИЛИШТА  
22-23.08.2020 година**

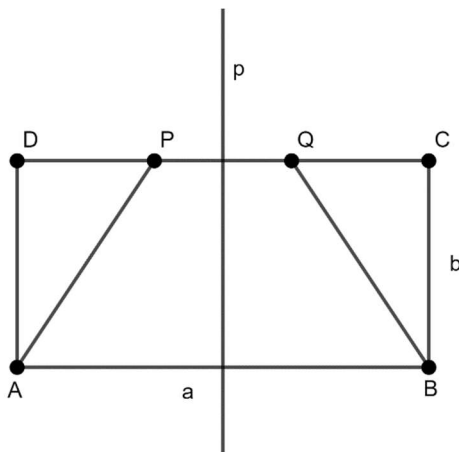
дека  $a \cdot d = 288 \text{ cm}^2$ . Значи, плоштината на квадратот е  $144 + 48 + 96 + 288 = 576 \text{ cm}^2$ , па страната на квадратот е  $24 \text{ cm}$ .

4. Даден е правоаголник  $ABCD$ . Со точките  $P$  и  $Q$  поголемата основа е поделена на три еднакви делови, како на цртежот.



- а) Докажи дека трапезот  $ABQP$  е рамнокрак.  
б) Одреди го односот меѓу плоштините на правоаголникот и трапезот.

**Решение:**  
**Прв начин:**



- а) Бидејќи правата  $p$  е оска на симетрија на сликата, имаме дека  $\overline{AP} = \overline{BQ}$  што значи дека трапезот  $ABQP$  е рамнокрак.  
б) Плоштината на правоаголникот е  $ab$ , плоштината на рамнокракиот трапез е  $\frac{1}{2} \left( a + \frac{a}{3} \right) \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \frac{4a}{3} \cdot b$ . Нивниот однос е  $3:2$ .

**Втор начин:** Правоаголникот содржи 6 правоаголни триаголници како на цртежот или 3 правоаголници, а трапезот 4 такви триаголници или 2 правоаголници што значи односот е  $3:2$ .