СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

27. МАКЕДОНСКА МАТЕМАТИЧКА ОЛИМПИЈАДА

РЕШЕНИЈА И РАСПРЕДЕЛБА НА ПОЕНИ

1. Нека a, b се природни броеви и p, q се прости броеви за кои $p \nmid q-1$ и $q \mid a^p - b^p$. Докажете дека $q \mid a - b$.

Решение. Ќе дадеме три докази.

Прв доказ. Доколку q го дели a или b тогаш ги дели обата броја, од што тврдењето следува непосредно. **(1п)** Да претпоставиме дека $q \nmid a$ и $q \nmid b$. Тогаш постои $d \in \mathbb{N}$ таков што $ad \equiv b \pmod{q}$. **(3п)** Следува дека $a^p d^p \equiv b^p \equiv a^p \pmod{q}$ и, оттука, $d^p \equiv 1 \pmod{q}$. **(2п)** Од друга страна, согласно малата теорема на Ферма, имаме $d^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. **(2п)** Значи, редот на d (во однос на q) ги дели p и $q-1$. Бидејќи $(p, q-1) = 1$, редот на d е 1, односно $d = 1$ и $a \equiv b \pmod{q}$. **(2п)** ⋄

Втор доказ. Да претпоставиме дека $q \nmid a - b$. Тогаш (од $q \mid a^p - b^p$) имаме $q \nmid a$ и $q \nmid b$. **(1п)** Тврдиме дека за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи: ако $q \mid a^m - b^m$ и $q \mid a^n - b^n$ тогаш $q \mid a^{(m,n)} - b^{(m,n)}$. **(1п)** Навистина, имајќи го предвид Евклидовиот алгоритам, доволно е да претпоставиме дека $m > n$ и да ја потврдиме деливоста $q \mid a^{m-n} - b^{m-n}$. **(2п)** Од друга страна, при направените претпоставки, оваа деливост следува од идентитетот $a^m - b^m = a^n(a^{m-n} - b^{m-n}) + b^{m-n}(a^n - b^n)$. **(2п)** Да искористиме дека, согласно малата теорема на Ферма, $q \mid a^{q-1} - b^{q-1}$. **(2п)** Значи, $q \mid a^{(p,q-1)} - b^{(p,q-1)}$. **(1п)** Останува да забележиме дека $(p, q-1) = 1$, противречност. **(1п)** ⋄

Трет доказ. Да претпоставиме дека $q \nmid a - b$. Оттука $q \nmid a$ и $q \nmid b$. **(1п)** Можеме да претпоставиме дека $(a, b) = 1$. **(1п)** Навистина, ако $a_0 = \frac{a}{(a,b)}$ и $b_0 = \frac{b}{(a,b)}$ тогаш (согласно направената претпоставка) $(a_0, b_0) = 1$, $q \mid a_0^p - b_0^p$ и $q \nmid a_0 - b_0$. **(1п)** Тврдиме дека, бидејќи $(a, b) = 1$, за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи $(a^m - b^m, a^n - b^n) = a^{(m,n)} - b^{(m,n)}$. Навистина, очигледно е исполнето $a^{(m,n)} - b^{(m,n)} \mid (a^m - b^m, a^n - b^n)$. За доказ на обратната деливост, имајќи го предвид Евклидовиот алгоритам, доволно е да земеме $m > n$ и да потврдиме дека важи $(a^m - b^m, a^n - b^n) \mid a^{m-n} - b^{m-n}$. Но, последнава деливост е директна последица на идентитетот $a^m - b^m = a^n(a^{m-n} - b^{m-n}) + b^{m-n}(a^n - b^n)$. **(3п)** Следствено, $(a^p - b^p, a^{q-1} - b^{q-1}) = a^{(p,q-1)} - b^{(p,q-1)} = a - b$. **(1п)** Останува да забележиме дека, од условот на задачата и малата теорема на Ферма, $q \mid (a^p - b^p, a^{q-1} - b^{q-1})$. **(2п)** Значи, $q \mid a - b$, противречност. **(1п)** ⋄

□

2. Нека $x_1, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ се реални броеви од интервалот $[1, 2]$. Докажете дека

$$|x_1 - x_2| + \cdots + |x_n - x_1| \leq \frac{2}{3}\left(x_1 + \cdots + x_n\right),$$

со равенство ако и само ако n е парен и n-торката $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ е еднаква на $(1, 2, \ldots, 1, 2)$ или $(2, 1, \ldots, 2, 1)$.

Решение. Ќе дадеме два докази.

Прв доказ. Ако $a, b \in [1,2]$ тогаш

$$|a-b| = \frac{1}{3}(a+b) - \frac{2}{3}\left(2\min\{a,b\} - \max\{a,b\}\right) \leq \frac{1}{3}(a+b)\,, \quad \textbf{(4п)}$$

со равенство ако и само ако $\{a,b\} = \{1,2\}$. **(2п)** Оттука,

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| + \cdots + |x_n - x_1| &\leq \frac{1}{3}\left((x_1+x_2) + \cdots + (x_n + x_1)\right) \\ &= \frac{2}{3}(x_1 + \cdots + x_n)\,, \ \textbf{(2п)} \end{aligned}$$

со равенство ако и само ако n е парен и $(x_1, \ldots, x_n)$ е $(1,2,\ldots,1,2)$ или $(2,1,\ldots,2,1)$. **(2п)** ⋄

Втор доказ. Најпрво да претпоставиме дека не постојат два последователни членови x_i (гледано циклично) кои се еднакви. Велиме дека x_i е *локален минимум* доколку $x_{i-1} > x_i$ и $x_i < x_{i+1}$ (циклично), и *локален максимум* ако $x_{i-1} < x_i$ а $x_i > x_{i+1}$ (циклично). Бројот на локални минимуми е еднаков со бројот на локални максимуми; да го означиме со k. **(3п)** Тогаш левата страна на неравентсвото може да се презапише како

$$2\left(\sum_{x_i \text{ is local maximum}} x_i\right) - 2\left(\sum_{x_i \text{ is local minimum}} x_i\right),$$

па она што сакаме да го докажеме гласи

$$\frac{4}{3}\left(\sum_{x_i \text{ is local maximum}} x_i\right) \leq \frac{8}{3}\left(\sum_{x_i \text{ is local minimum}} x_i\right) + \frac{2}{3}\left(\sum_{x_i \text{ is neither}} x_i\right).$$

Но, последново неравенство непосредно следува од

$$\frac{4}{3}\left(\sum_{x_i \text{ is local maximum}} x_i\right) \leq \frac{8k}{3} \leq \frac{8}{3}\left(\sum_{x_i \text{ is local minimum}} x_i\right). \quad \textbf{(3п)}$$

Притоа, равенство важи ако и само ако: секој x_i е локален минимум или локален максимум, сумата на локалните минимуми изнесува k (односно секој локален минимум е еднаков на 1), и сумата на локалните максимуми изнесува $2k$ (односно секој локален максимум е еднаков на 2). Со други зборови, равенство важи ако и само ако n е парен и $(x_1, \ldots, x_n)$ е $(1,2,\ldots,1,2)$ или $(2,1,\ldots,2,1)$. **(2п)**

Во случај кога има еднакви последователни членови, можеме да избришеме еден од нив, и да ја разгледуваме добиената низа $(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Левата страна на соодветното неравенство за (y_i) е еднаква на левата страна на неравенството за (x_i), додека десната страна е строго помала. Следствено, доволно е да го потврдиме неравенството за (y_i). Ова размислување и редукција ги повторуваме додека не преостанат еднакви последователни членови, а потоа го применуваме неравенството покажано во претходниот случај. **(2п)** ⋄

□

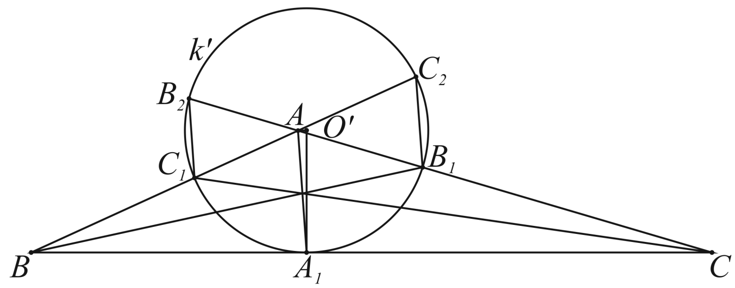
3. Нека ABC е триаголник, и A_1, B_1, C_1 се точки на страните BC, CA, AB, соодветно, такви што AA_1, BB_1, CC_1 се симетрали на внатрешните агли на $\triangle ABC$. Опишаната кружница $k' = (A_1B_1C_1)$ ја допира страната BC во A_1. Нека B_2 и C_2, соодветно, се вторите пресечни точки на k' со правите AC и AB. Докажете дека $|AB| = |AC|$ или $|AC_1| = |AB_2|$.

Решение. Со a, b, c ги означуваме должините на страните на $\triangle ABC$. Теоремата за симетрала на внатрешен агол кажува дека

$$\frac{\overline{BA_1}}{\overline{A_1C}} = \frac{c}{b} \quad , \quad \frac{\overline{CB_1}}{\overline{B_1A}} = \frac{a}{c} \quad , \quad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{C_1B}} = \frac{b}{a}\,.$$

Оттука,

$$|BA_1| = \frac{ac}{b+c}\,,\ |A_1C| = \frac{ab}{b+c}\,,\ |CB_1| = \frac{ab}{a+c}\,,\ |B_1A| = \frac{bc}{a+c}\,,\ |AC_1| = \frac{bc}{a+b}\,,\ |C_1B| = \frac{ac}{a+b}\,. \quad \textbf{(2п)}$$



Земајќи ги предвид степените на точките A, B, C во однос на кружницата k', имаме

$$\overline{AC_1}\cdot\overline{AC_2} = \overline{AB_1}\cdot\overline{AB_2} \quad , \quad \overline{BA_1}^2 = \overline{BC_1}\cdot\overline{BC_2} \quad , \quad \overline{CA_1}^2 = \overline{CB_1}\cdot\overline{CB_2}\,. \quad \textbf{(2п)}$$

Нека $m = |AC_2|$ и $n = |AB_2|$. Комбинирајќи ги претходните заклучоци, добиваме дека

$$\begin{aligned}
\frac{bc}{a+b}m &= \frac{bc}{a+c}n \Rightarrow m = \frac{a+b}{a+c}\cdot n \\
\frac{a^2b^2}{(b+c)^2} &= \frac{ab}{a+c}(b+n) \Rightarrow n = b\cdot\frac{a(a+c)-(b+c)^2}{(b+c)^2} \\
\frac{a^2c^2}{(b+c)^2} &= \frac{ac}{a+b}(c+m) \Rightarrow \\
\frac{ac}{(b+c)^2} &= \frac{1}{a+b}(c+\frac{a+b}{a+c}\cdot n) = \frac{1}{a+b}(c+\frac{a+b}{a+c}\cdot b\cdot\frac{a(a+c)-(b+c)^2}{(b+c)^2})\,.
\end{aligned}$$

Последното равенство се сведува на

$$a(a+b)(a+c)(c-b) = (b+c)^2(a+b+c)(c-b)\,. \quad \textbf{(3п)}$$

Значи, ако не важи $b = c$, тогаш $a(a+b)(a+c) = (b+c)^2(a+b+c)$. **(1п)** Следствено,

$$\begin{aligned}
|AB_2| &= n \\
&= b\cdot\frac{a(a+c)-(b+c)^2}{(b+c)^2} \\
&= \frac{b}{a+b}\frac{a(a+b)(a+c)-(a+b)(b+c)^2}{(b+c)^2} \\
&= \frac{b}{a+b}\frac{(a+b+c)(b+c)^2-(a+b)(b+c)^2}{(b+c)^2} \\
&= \frac{bc}{a+b} \\
&= |AC_1|\,. \quad \textbf{(2п)}
\end{aligned}$$

□

4. Нека S е непразно конечно множество, и $\mathcal{F}$ е колекција подмножества од S при што се задоволени следниве услови:

(i) $\mathcal{F} \setminus \{S\} \neq \emptyset$;

(ii) ако $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$, тогаш $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$ и $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$.

Докажете дека постои $a \in S$ што припаѓа на најмногу половина од елементите на $\mathcal{F}$.

Решение. Ќе дадеме два докази. Најпрво ја воведуваме следнава нотација. За елемент $a \in S$, нека $\mathcal{F}(a) := \{U \in \mathcal{F} \ \mid \ a \in U\}$ и $\mathcal{F}(a)^c := \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}(a)$. Она што сакаме да докажеме е дека за некое $a \in S$ важи $|\mathcal{F}(a)| \leq |\mathcal{F}(a)^c|$. **(1п)**

Прв доказ. Ќе го искористиме следново: ако множества A, B, C задоволуваат $A \cup B = A \cup C$ и $A \cap B = A \cap C$, тогаш $B = C$. (Навистина, дадените две равенства повлекуваат дека $A \oplus B = A \oplus C$, од каде се добива $B \oplus C = (B \oplus A) \oplus (A \oplus C) = \emptyset$.) **(3п)**

Разгледуваме максимален елемент M во делумно подреденото множество $(\mathcal{F} \setminus \{S\}, \subseteq)$. Со други зборови, M е вистинско подмножество на S и воедно елемент на $\mathcal{F}$, и притоа не постои M' со истите особини за кое $M \subset M'$. (Напоменуваме дека вакво M постои бидејќи, според условот на задачата, S е непразно конечно множество и $\mathcal{F} \setminus \{S\} \neq \emptyset$.) Нека $a \in S \setminus M$. Согласно изборот на M, за секое $U \in \mathcal{F}(a)$ важи $M \cup U = S$. **(3п)** Следствено, пресликувањето $\mathcal{F}(a) \to \mathcal{F}(a)^c$ дефинирано со $U \mapsto M \cap U$ е инјекција. **(2п)** Значи $|\mathcal{F}(a)| \leq |\mathcal{F}(a)^c|$. **(1п)** $\diamond$

Втор доказ. Да земеме $a \in S$ таков што $\mathcal{F}(a)^c$ е максимален елемент во делумно подреденото множество $(\{\mathcal{F}(b)^c \ \mid \ b \in S\}, \subseteq)$. (На пример, секој a што го максимизира $|\mathcal{F}(a)^c|$ ја има наведената особина.) Од (i) добиваме $\mathcal{F}(a)^c \neq \emptyset$. Нека $F = \bigcup_{V \in \mathcal{F}(a)^c} V$. Бидејќи множеството S е конечно, (ii) повлекува $F \in \mathcal{F}$. **(3п)** Тврдиме дека пресликувањето $\mathcal{F}(a) \to \mathcal{F}(a)^c$ дефинирано со $U \mapsto F \cap U$ е инјекција. Навистина, да претпоставиме дека постојат различни $U', U'' \in \mathcal{F}(a)$ такви што $F \cap U' = F \cap U''$. Без губење од општоста, нека $b \in U' \setminus U''$. Тогаш, бидејќи $b \notin F \cap U''(= F \cap U')$, имаме $b \notin F$. Следствено, $\mathcal{F}(a)^c \subseteq \mathcal{F}(b)^c$. **(3п)** Уште повеќе, со оглед на тоа дека $U'' \in \mathcal{F}(b)^c \setminus \mathcal{F}(a)^c$, важи $\mathcal{F}(a)^c \subset \mathcal{F}(b)^c$. **(1п)** Но, последниов заклучок противречи на направениот избор за a, што ја потврдува инјективноста на разгледуваното пресликување. **(1п)** Значи $|\mathcal{F}(a)| \leq |\mathcal{F}(a)^c|$. **(1п)** $\diamond$

$\square$