63 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
15-16.08.2020

Четврта година

1. Определи ги сите можни пополнувања на празните полиња во табелата, така што броевите во секоја редица и во секоја колона претставуваат аритметичка прогресија.

				14
	10			
		20		
2				

Решение. Да го означиме со a_{ij} елементот што се наоѓа во i-та редица и j-та колона, со r_1 разликата на аритметичката прогресија во првата редица и со k_1 разликата на аритметичката прогресија во првата колона.

(1) Од првата редица имаме $14-a_{11}=4r_1$, а од првата колона $2-a_{11}=4k_1$. Со одземање на овие равенства добиваме $4r_1-4k_1=12$ т.е. $r_1-k_1=3$.

(2) Бидејќи во близина на a_{23} има два броја, ќе го изразиме овој елемент на два различни начини. Од третата колона имаме $a_{23}=\dfrac{a_{13}+a_{33}}{2}=\dfrac{14-2r_1+20}{2}=17-r_1$.

Од втората редица имаме $\dfrac{a_{23}+a_{21}}{2}=a_{22}$ т.е. $\dfrac{a_{23}+2-3k_1}{2}=10$, од каде $a_{23}=18+3k_1$.

Со изедначување на двата изрази за a_{23}, се добива $r_1+3k_1=-1$.

(3) Од (1) и (2) го добивме системот за разликите на аритметичките прогресии од првата редица и првата колона:

$$\begin{cases} r_1-k_1=3 \\ r_1+3k_1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1-k_1=3 \\ 4k_1=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1=2 \\ k_1=-1 \end{cases}.$$

Сега може да се пополнат првата редица и првата колона, а потоа лесно се пополнуваат и останатите полиња во табелата. Конечно решение:

6	8	10	12	14
5	10	15	20	25
4	12	20	28	36
3	14	25	36	47
2	16	30	44	58

2. Во триаголник ABC познати се должините на страните $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=7$ и $\overline{AC}=5$. Нека $\alpha=\angle BAC$. Пресметај ја вредноста на изразот $\sin^6\dfrac{\alpha}{2}+\cos^6\dfrac{\alpha}{2}$.

Решение. Користејќи ја формулата $x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2)$, имаме:

$$\sin^6\frac{\alpha}{2}+\cos^6\frac{\alpha}{2}=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3-3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=1-3\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=1-3\left(\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2=1-\frac{3}{4}\sin^2\alpha$$
$$=1-\frac{3}{4}\left(1-\cos^2\alpha\right)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cos^2\alpha.$$

Применувајќи ја косинусната теорема за триаголникот ABC, добиваме:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}}=\frac{16+25-49}{2\cdot4\cdot5}=-\frac{1}{5}.$$

Оттука, $\sin^6\frac{\alpha}{2}+\cos^6\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)^2=\frac{7}{25}$.

Решение 2. Користиме $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$ и $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$. По добивање на $\cos\alpha$, имаме $\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{5}$ и $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5}$, од каде $\sin^6\frac{\alpha}{2}+\cos^6\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{7}{25}$.

3. Нека $a_1,a_2,...,a_{2020}$ се позитивни реални броеви за кои важи $a_1\le a_2\le ...\le a_{2020}$, $a_1+a_2+...+a_{2020}=2020$ и $a_1^2+a_2^2+...+a_{2020}^2=2021$. Докажи дека

$$a_{2019}\ge 1-\frac{1}{\sqrt{2019\cdot 2020}}.$$

Решение. Од неравенството меѓу квадратна и аритметичка средина за броевите $a_1,a_2,...,a_{2019}$ добиваме

$$2021-a_{2020}^2=a_1^2+a_2^2+...+a_{2019}^2\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_{2019})^2}{2019}=\frac{(2020-a_{2020})^2}{2019}\quad ....(1)$$

Неравенството (1) е еквивалентно со неравенството $(a_{2020}-1)^2\le\frac{2019}{2020}$ ....(2)

Од условот на задачата лесно се утврдува дека $a_{2020}>1$. Коренувајќи го неравенството (2) добиваме $a_{2020}\le 1+\sqrt{\frac{2019}{2020}}$. Од $a_1\le a_2\le ...\le a_{2020}$ и од претходното неравенство следува

$$2020=(a_1+a_2+...+a_{2019})+a_{2020}\le 2019a_{2019}+1+\sqrt{\frac{2019}{2020}},\text{ т.е.}$$

$$a_{2019}\ge 1-\frac{1}{\sqrt{2019\cdot2020}}.$$

4. Нека n и k се природни броеви за кои важи $n>k\ge4$ и притоа $k(k-1)$ не се дели со $n-1$ и $k(k-1)(k-2)$ не се дели со $n-2$. Докажи дека биномниот коефициент $\binom{n}{k}$ има најмалку два прости делители p и q за кои важи $p\,\big|\,(n-1)$ и $q\,\big|\,(n-2)$.

Решение. Нека НЗД$(n-1,k(k-1))=a$ и НЗД$(n-2,k(k-1)(k-2))=b$. Од условот на задачата следува $a<n-1$ и $b<n-2$. Дополнително, постојат цели броеви x_1,y_1,x_2,y_2

за кои важи $(n-1)x_1+k(k-1)y_1=a$ и $(n-2)x_2+k(k-1)(k-2)y_2=b$.
Оттука добиваме

$$a\cdot\binom{n}{k}=((n-1)x_1+k(k-1)y_1)\cdot\binom{n}{k}=(n-1)\cdot x_1\cdot\binom{n}{k}+k(k-1)y_1\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\binom{n-2}{k-2}$$
$$=(n-1)\left(x_1\cdot\binom{n}{k}+ny_1\cdot\binom{n-2}{k-2}\right).$$

Од последниот идентитет следува дека $(n-1)\Big|a\cdot\binom{n}{k}$, т.е. $\frac{n-1}{a}\Big|\binom{n}{k}$.

Аналогно заклучуваме $\frac{n-2}{b}\Big|\binom{n}{k}$. Бидејќи $a<n-1$ и $b<n-2$ добиваме дека $\frac{n-1}{a}$ и $\frac{n-2}{b}$ се различни од еден. Исто така важи $\frac{n-1}{a}\le n-1<n\le\binom{n}{k}$. Аналогно $\frac{n-2}{b}<\binom{n}{k}$.

Останува да покажеме дека $\frac{n-1}{a}\ne\frac{n-2}{b}$. Да претпоставиме дека $\frac{n-1}{a}=\frac{n-2}{b}$, т.е. $b(n-1)=a(n-2)$. Од последното равенство следува $(n-1)\big|a(n-2)$. Бидејќи $n-1$ и $n-2$ се заемно прости броеви и $a<n-1$, следува дека деливоста не е можна. На крај, нека p и q се прости делители на $\frac{n-1}{a}$ и $\frac{n-2}{b}$, соодветно. Јасно е дека p и q го делат биномниот коефициент $\binom{n}{k}$ и притоа $p\big|(n-1)$ и $q\big|(n-2)$. Од последното и од тоа што $n-1$ и $n-2$ се заемно прости броеви, следува и дека $p\ne q$.