63 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
15-16.08.2020

Трета година

1. Одреди ги минималната и максималната вредност на функцијата $f(x)=\dfrac{x^2}{ax^4+b}$, каде $a,b>0$, а потоа одреди за кои вредности на аргументот x тие се достигнуваат.

Решение 1. Јасно $x^2\geq 0$, а од условот $a,b>0$ следи и $ax^4+b>0$. Тогаш $f(x)\geq 0$, па минималната вредност на функцијата е $f(x)=0$ и истата се достигнува единствено за $x=0$.

Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина за позитивните броеви ax^4 и b добиваме $ax^4+b\geq 2\sqrt{ax^4\cdot b}=2x^2\sqrt{ab}$. Оттука, $\dfrac{x^2}{ax^4+b^2}\leq\dfrac{x^2}{2x^2\sqrt{ab}}=\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$. Значи, максималната вредност на дадената функција е $\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$. Максимумот се достигнува кога неравенството $ax^4+b\geq 2x^2\sqrt{ab}$ станува равенство, т.е. кога $ax^4=b$. Решавајќи ја равенката $ax^4=b$, добиваме $x=\pm\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$.

Решение 2. Минималната вредност се одредува исто како во претходното решение. За да ја одредиме максималната вредност на функцијата, го трансформираме равенството $f(x)=y$ во облик $ayx^4-x^2+by=0$, односно $ayt^2-t+by=0$, за $t=x^2$. Последната равенка има реални корени по променливата t ако и само ако дискриминантата на квадратната равенка $D\geq 0$, односно

$$1-4aby^2\geq 0 \Leftrightarrow 4aby^2\leq 1 \Leftrightarrow y^2\leq\frac{1}{4ab} \Leftrightarrow |y|\leq\frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

Од ненегативноста на y следува дека $y\in\left[0,\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}\right]$. Тогаш, максималната вредност на функцијата е $y=f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$. Останува да се одредат вредностите на променливата x за кои се достигнува максимумот. Ако во разгледуваната квадратна равенка $ayt^2-t+by=0$ ставиме $y=\dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$, добиваме $\dfrac{a}{2\sqrt{ab}}t^2-t+\dfrac{b}{2\sqrt{ab}}=0$, односно $at^2-2t\sqrt{ab}+b=0$. Последната равенка е еквивалентна со $\left(t\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=0$, со решенија по t, $t_{1,2}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$. Оттука $x=\pm\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$. Јасно, максималната вредност на дадената функција се достигнува за две вредности на променливата, $x=-\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$ и $x=\sqrt[4]{\dfrac{b}{a}}$.

2. Пресметај го збирот $f(\dfrac{1}{2020})+f(\dfrac{2}{2020})+...+f(\dfrac{2019}{2020})$, каде што $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}, x\in\mathbb{R}$.

Решение. Нека $x\in\mathbb{R}$. Тогаш $f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}=\frac{4}{4+2\cdot 4^x}=\frac{2}{2+4^x}$ и важи

$$f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1. \qquad (1)$$

Да забележиме дека збирот што треба да го пресметаме има 2019 собироци и уште

$$\frac{1}{2020}+\frac{2019}{2020}=\frac{2}{2020}+\frac{2018}{2020}=\ldots=\frac{1009}{2020}+\frac{1011}{2020}=1. \qquad (2)$$

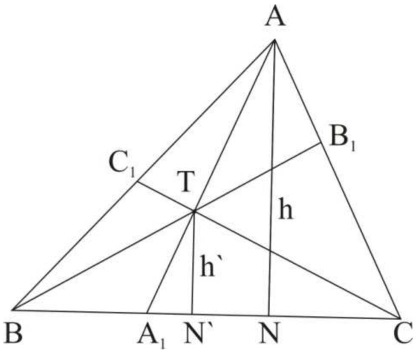
Имајќи ги предвид (1) и (2), за дадениот збир добиваме:

$$f(\frac{1}{2020})+f(\frac{2}{2020})+\ldots+f(\frac{2019}{2020})$$

$$=\left(f(\frac{1}{2020})+f(\frac{2019}{2020})\right)+\left(f(\frac{2}{2020})+f(\frac{2018}{2020})\right)+\ldots+\left(f(\frac{1009}{2020})+f(\frac{1011}{2020})\right)+f(\frac{1010}{2020})$$

$$=1009\cdot 1+f(\frac{1}{2})=1009+\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}+2}=1009+\frac{1}{2}=1009,5.$$

3. Нека T е произволна точка од внатрешноста на триаголник ABC и нека A_1,B_1,C_1 се пресеците на правите AT,BT,CT со страните BC,CA,AB, соодветно. Докажи дека важи $\frac{\overline{AT}}{\overline{A_1T}}\cdot\frac{\overline{BT}}{\overline{B_1T}}\cdot\frac{\overline{CT}}{\overline{C_1T}}\geq 8$.



Решение. Нека P е плоштината на триаголникот ABC, а P_1,P_2,P_3 се плоштините на триаголниците BCT,CAT,ABT, соодветно. Триаголниците ABC и BCT имаат заедничка страна, па плоштините им се однесуваат како соодветните висини, т.е. $\frac{P}{P_1}=\frac{h}{h'}$. Нека N е подножјето на висината во триаголникот ABC, спуштена од темето A, а N' е подножјето на висината во триаголникот BCT, спуштена од T.

Од сличноста на триаголниците AA_1N и TA_1N', следува дека $h:h'=\overline{AA_1}:\overline{TA_1}$. Значи $\frac{h}{h'}=\frac{P}{P_1}=\frac{\overline{AA_1}}{\overline{TA_1}}$, односно $\frac{P_1+P_2+P_3}{P_1}=\frac{\overline{AA_1}}{\overline{TA_1}}$. Оттука, $\frac{P_2+P_3}{P_1}=\frac{\overline{AA_1}-\overline{TA_1}}{\overline{TA_1}}=\frac{\overline{AT}}{\overline{TA_1}}$.

Аналогно добиваме $\frac{P_1+P_2}{P_3}=\frac{\overline{CT}}{\overline{TC_1}}$ и $\frac{P_1+P_3}{P_2}=\frac{\overline{BT}}{\overline{TB_1}}$. Користејќи ги добиените односи и неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина, добиваме:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{A_1T}}\cdot\frac{\overline{BT}}{\overline{B_1T}}\cdot\frac{\overline{CT}}{\overline{C_1T}}=\frac{(P_2+P_3)(P_1+P_3)(P_1+P_2)}{P_1P_2P_3}\geq\frac{2\sqrt{P_2P_3}\cdot 2\sqrt{P_1P_3}\cdot 2\sqrt{P_1P_2}}{P_1P_2P_3}=8.$$

4. Докажи дека меѓу тринаесет дадени реални броеви секогаш постојат два, a и b, за кои важи $0\leq \frac{a-b}{1+ab}<2-\sqrt{3}$.

Решение. Функцијата $\operatorname{tg}x$ е еднозначно дефинирана на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, а нејзиното множество вредности е целото множество $\mathbb{R}$. Имајќи го предвид графикот на функцијата, се забележува дека на секој реален број може да му придружиме единствен агол помеѓу $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, така што дадениот број е еднаков со тангенсот на придружениот агол. Со други зборови, за секој $c\in\mathbb{R}$, постои единствен агол $\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, така што $c=\operatorname{tg}\gamma$.

Нека дадените броеви се $a_1,a_2,...,a_{13}$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1\geq a_2\geq ...\geq a_{13}$. Од претходната дискусија, имајќи предвид дека $\operatorname{tg}x$ е растечка функција, следува дека постојат $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_{13}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, такви што $\alpha_1\geq\alpha_2\geq...\geq\alpha_{13}$ и $a_i=\operatorname{tg}\alpha_i, i=1,2,..,13$. Тогаш постојат α_p и α_s, $\alpha_p\geq\alpha_s$, такви што $\alpha_p-\alpha_s<\frac{\pi}{12}$ (Во спротивно $\alpha_1-\alpha_{13}=(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+...+(\alpha_{12}-\alpha_{13})\geq\pi$, што е контрадикција со $\alpha_1,\alpha_{13}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$). Значи $a_p=\operatorname{tg}\alpha_p, a_s=\operatorname{tg}\alpha_s$ и $0\leq\alpha_p-\alpha_s<\frac{\pi}{12}$. Од последното, повторно имајќи предвид дека $\operatorname{tg}x$ е монотоно растечка функција на интервалот $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, добиваме

$$\operatorname{tg}0\leq\operatorname{tg}(\alpha_p-\alpha_s)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{12},\text{ од каде } 0\leq\frac{\operatorname{tg}\alpha_p-\operatorname{tg}\alpha_s}{1+\operatorname{tg}\alpha_p\cdot\operatorname{tg}\alpha_s}<\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{1+\cos\frac{\pi}{6}}},\text{ односно } 0\leq\frac{a_p-a_s}{1+a_p\cdot a_s}<2-\sqrt{3}.$$

Оттука, земајќи $a=a_p$ и $b=a_s$, се добива почетното тврдење.