63 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
15-16.08.2020

Втора година

1. Две парчиња легура на злато и сребро содржат вкупно $a$kg злато. Ако процентот на злато во првото парче е ист со процентот на злато во второто парче, двете парчиња би имале вкупно $b$kg злато, а ако процентот на злато во второто парче е ист со процентот на злато во првото парче, двете парчиња би имале вкупно $c$kg злато. Колку килограми злато има во првото, а колку во второто парче?

Решение. Нека првото парче содржи p проценти злато и има $x$kg, а второто содржи q проценти злато и има $y$kg. Тогаш, според условите, важи $px+qy=100a$, $qx+qy=100b$ и $px+py=100c$. Тогаш, $qy-py=100(a-c)$ и $px-qx=100(a-b)$. Имаме $x=100\frac{a-b}{p-q}$ и $y=100\frac{c-a}{p-q}$. Уште важи $\frac{b}{q}=\frac{c}{p}$, па $p-q=p-p\frac{b}{c}=\frac{p(c-b)}{c}=\frac{q(c-b)}{b}$. Тогаш, $\frac{p}{100}x=\frac{p}{100}\cdot 100\cdot\frac{a-b}{p-q}=p\frac{a-b}{\frac{p(c-b)}{c}}=\frac{c(a-b)}{c-b}$kg и

$$\frac{q}{100}y=\frac{q}{100}\cdot 100\cdot\frac{c-a}{p-q}=q\frac{c-a}{\frac{q(c-b)}{b}}=\frac{b(c-a)}{c-b}\text{kg}.$$

2. Ако за ненултите реални броеви a,b,c важи $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{2}}{c}$ и $ab>0$, докажи дека $\frac{a+c}{a\sqrt{2}-c}+\frac{b+c}{b\sqrt{2}-c}\geq 2+2\sqrt{2}$.

Решение. Од $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{\sqrt{2}}{c}$ и $c\neq 0$ следува дека $a+b\neq 0$ и $c=\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Тогаш,

$$\frac{a+c}{a\sqrt{2}-c}+\frac{b+c}{b\sqrt{2}-c}=\frac{a+\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}{a\sqrt{2}-\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}+\frac{b+\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}{b\sqrt{2}-\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}}=\frac{a+b+b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-b\sqrt{2}}+\frac{a+b+a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b\sqrt{2}-a\sqrt{2}}$$

$$=\frac{a+b+b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}}+\frac{a+b+a\sqrt{2}}{b\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(1+\sqrt{2})b}{a\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(1+\sqrt{2})a}{b\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right),$$

и бидејќи важи $ab>0$, имаме

$$\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\geq\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}2=\frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2+2\sqrt{2}.$$

3. Реши го системот во множеството реални броеви: $x^2+x^2y^2+x^2y^4=525$ и $x+xy+xy^2=35$.

Решение. Од $525=x^2+x^2y^2+x^2y^4=(x+xy^2)^2-x^2y^2=(x+xy^2-xy)(x+xy^2+xy)$ и $x+xy+xy^2=35$ следува дека $x-xy+xy^2=15$. Од $x+xy+xy^2=35$ и $x-xy+xy^2=15$ следува дека $2xy=20$, односно $xy=10$. Јасно $x\neq 0$, па ако замениме $y=\frac{10}{x}$ во $x+xy+xy^2=35$, добиваме $x+x\frac{10}{x}+x\frac{100}{x^2}=35$, односно $x^2-25x+100=0$. Решенија на последната равенка се $x_1=5$ и $x_2=20$. Конечно, решенија на дадениот систем се $(5,2)$ и $(20,\frac{1}{2})$.

4. Точка O се наоѓа во внатрешноста на триаголник ABC и важи $\angle BOC=90°$ и $\angle BAO=\angle BCO$. Ако M и N се средини на страните AC и BC соодветно, докажи дека $\angle OMN=90°$.

Решение. Нека P е средина на отсечката OC. Точката N е центар на опишаната кружница околу правоаголниот триаголник BOC бидејќи е средина на хипотенузата BC, па имаме $\angle BCO=\angle NCP=\angle NOP$. Точките M и P се средини на страните AC и OC соодветно, па значи MP е средна линија за триаголникот АOC т.е. $MP \parallel AO$. Аналогно, $MN \parallel AB$.

Оттука добиваме $\angle NMP=\angle BAO=\angle BCO=\angle NOP$.

Следува дека четириаголникот $ONPM$ е тетивен, па $\angle OMN=\angle OPN=\angle CPN=\angle COB=90^{\circ}$.