63 ДРЖАВЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА 15-16.08.2020

Прва година

1. а) Нека x, y и z се цели броеви. Докажи дека ако $x^3+y^3+z^3$ е делив со 7, тогаш барем еден од броевите x, y и z е делив со 7.

б) Нека x, y, z и t се цели броеви, такви што збирот $x^4+y^4+z^4+t^4$ е делив со 7. Дали е можно 7 да не е делител на ниту еден од броевите x, y, z, t? Образложи!

Решение. а) Да претпоставиме дека ниту еден од броевите x, y и z не е делив со 7. Лесно се проверува дека нивните трети степени, при делење со 7, даваат остатоци 1 или 6. Тогаш $x^3+y^3+z^3$, при делење со 7, дава остаток 1, 3, 4 или 6, што е контрадикција на „$x^3+y^3+z^3$ е делив со 7". Следува дека барем еден од броевите x, y и z е делив со 7.

б) Да, можно е. Имено, нека $x=1, y=2, z=2, t=2$. Тогаш ниту еден од броевите не е делив со 7, додека $x^4+y^4+z^4+t^4=49$.

2. Секој од учениците во еден клас игра барем една од следните компјутерски игри: Minecraft, Fortnite, GTA или Clash of Clans. Тој што игра Minecraft или Clash of Clans, игра и Fortnite; тој што игра GTA, игра и Clash of Clans; тој што игра Fortnite и GTA, игра и Minecraft. Која од овие игри ја играат најмногу, а која најмалку ученици? Образложи го одговорот.

Решение. Дадените услови ќе ги означиме со: (i) Тој што игра Minecraft или Clash of Clans, игра и Fortnite; (ii) Тој што игра GTA, игра и Clash of Clans; (iii) Тој што игра Fortnite и GTA, игра и Minecraft. Нека A_1, A_2, A_3, A_4 се множествата од ученици кои играат Minecraft, Fortnite, GTA, Clash of Clans соодветно. Тогаш, условите (i)-(iii) преминуваат во: (i) $A_1 \cup A_4 \subseteq A_2$; (ii) $A_3 \subseteq A_4$; (iii) $A_2 \cap A_3 \subseteq A_1$. Сега, од (i) имаме дека $A_1 \subseteq A_2$ и $A_4 \subseteq A_2$. Од $A_4 \subseteq A_2$ и (ii) следува дека $A_3 \subseteq A_2$. Добивме дека $A_1 \subseteq A_2$, $A_3 \subseteq A_2$ и $A_4 \subseteq A_2$, што значи дека множеството A_2 е најбројно множество од сите четири множества, а бидејќи секој ученик припаѓа на барем едно од тие множества, заклучуваме дека Fortnite ја играат најмногу ученици (**сите**). Понатаму, од $A_3 \subseteq A_2$ следува $A_2 \cap A_3 = A_3$. Од последното равенство и (iii) следува дека $A_3 \subseteq A_1$. Добивме дека $A_3 \subseteq A_1$, $A_3 \subseteq A_2$ и $A_3 \subseteq A_4$, што значи дека множеството A_3 е најмалубројно од сите четири множества, а бидејќи секој ученик припаѓа на барем едно од тие множества, заклучуваме дека GTA ја играат најмалку од учениците.

3. Нека за реалните броеви $a, b, c \neq 0$ важи равенството $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Докажи дека за секој непарен број n важи и равенството $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$.

Решение. Со низата еквивалентни трансформации

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow \frac{bc+ac+ab}{abc}=\frac{1}{a+b+c} \Leftrightarrow (a+b+c)(bc+ac+ab)=abc$$

$$\Leftrightarrow abc+a^2c+a^2b+b^2c+abc+ab^2+bc^2+ac^2=0$$

$\Leftrightarrow\ (a^2b+abc)+(a^2c+ac^2)+(abc+bc^2)+(ab^2+b^2c)=0$

$\Leftrightarrow\ ab(a+c)+ac(a+c)+bc(a+c)+b^2(a+c)=0\ \Leftrightarrow\ (a+c)(ab+ac+bc+b^2)=0$

$\Leftrightarrow\ (a+c)(a(b+c)+b(b+c))=0\ \Leftrightarrow\ (a+b)(a+c)(b+c)=0$,

почетното равенство се сведува на

$$(a+b)(a+c)(b+c)=0. \qquad (1)$$

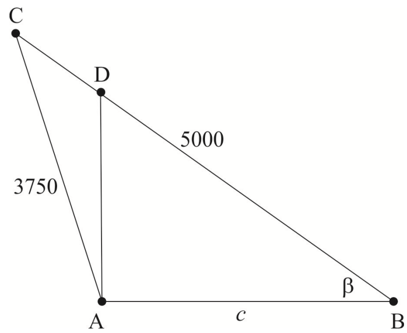
Ако наместо a,b,c ставиме a^n,b^n,c^n, соодветно, тогаш равенството кое треба да го покажеме, т.е. $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}$, ќе биде точно ако и само ако важи

$$(a^n+b^n)(a^n+c^n)(b^n+c^n)=0. \ (2)$$

Ако n е непарен број, (2) следува од (1). Имено, БГО можеме да претпоставиме дека $a+b=0$. Тогаш $b=-a$ и $a^n+b^n=a^n+(-a)^n=a^n-a^n=0$, од каде следува (2), односно равенството кое требаше да го покажеме.

4. Домот на Матеј, неговото основно училиште и неговото средно училиште формираат триаголник ABC по тој редослед на темињата. Растојанието од домот на Матеј до неговото средно училиште изнесува 3750 m, а растојанието од средното до неговото основно училиште изнесува 5000 m. Колку изнесува растојанието од домот на Матеј до основното училиште, ако се знае дека аголот $\measuredangle BAC$ е за 90° поголем од аголот $\measuredangle ABC$?

Решение. Домот на Матеј се наоѓа во точката A, основното училиште во точката B и средното училиште во точката C. Тогаш, за триаголникот ABC имаме $a=\overline{BC}=5000\,\text{m}$, $b=\overline{AC}=3750\,\text{m}$ и $\alpha=\beta+90^\circ$, каде $\alpha=\measuredangle BAC$ и $\beta=\measuredangle ABC$. Се бара да се одреди должината на страната $c=\overline{AB}$. Од точката A издигаме нормала на страната AB, која ја сече страната BC во точката D (види цртеж). Тогаш $\measuredangle BAD=90^\circ$ и $\measuredangle DAC=\beta$, а $\measuredangle ADC=\beta+90^\circ$ (како надворешен агол на аголот во темето D во триаголникот ABD).



Од $\measuredangle ABC=\measuredangle DAC=\beta$ и $\measuredangle BAC=\measuredangle ADC=\beta+90^\circ$ следува дека триаголниците ABC и DAC се слични. Од сличноста имаме дека важи $\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{DC}$, односно $5000:3750=3750:\overline{DC}$, од каде пак се добива дека $\overline{DC}=\frac{3750\cdot 3750}{5000}=\frac{5625}{2}$ m.

Тогаш, $\overline{BD}=\overline{BC}-\overline{DC}=5000-\frac{5625}{2}=\frac{4375}{2}$ m, а бидејќи BAD е правоаголен триаголник, добиваме дека $\overline{AD}=\sqrt{\overline{BD}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{\left(\frac{4375}{2}\right)^2-c^2}$.

Повторно од сличноста на истите триаголници, имаме дека $\overline{BC}:\overline{AB}=\overline{AC}:\overline{DA}$, односно $5000:c=3750:\sqrt{\left(\frac{4375}{2}\right)^2-c^2}$, од каде $\sqrt{\left(\frac{4375}{2}\right)^2-c^2}=\frac{3750c}{5000}=\frac{3c}{4}$. Со квадрирање на последното равенство се добива $\left(\frac{4375}{2}\right)^2-c^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2c^2$, односно $c^2=\frac{\left(\frac{4375}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1750^2$, од каде $c=1750\,\mathrm{m}$.