ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата да бидат подготвени во MS Word. Испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

со предмет „Задачи од училницата". Ве молиме решенијата испратете ги во еден word документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 31 март 2020.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

Прва година

1. Две кружници $k_1(O_1,R)$ и $k_2(O_2,r)$ се допираат однадвор во точката M. На кружницата k_2 избрана е точката N која е дијаметрално спротивна на точката M. Низ точката N повлечена е тангента t на кружницата k_2. Одреди го радиусот на трета кружница k_3 за која t е тангента и која однадвор ги допира k_1 и k_2.

2. Даден е разностран четириаголник кој нема паралелни страни. Точката E е средишна на отсечката AB, а точката K е средишна точка на отсечката CD. Докажи дека средишните точки на отсечките AK, CE, BK и DE се темиња на паралелограм.

3. Некоја стока чини 4550 денари, а платена е со 23 банкноти чии вредности се 50, 100 и 500 денари. Бројот на банкноти од 50 денари е најмал. Со колку банкноти од по 50, 100 и 500 денари е платена стоката?

4. Во три сада има вода. Ако половина од водата од првиот сад се претури во вториот, а потоа третина од водата од вториот се претури во третиот сад и на крај четвртина од третиот се претури во првиот сад, тогаш во сите три сада ќе има по 6 литри вода. По колку литри вода има во секој сад на почеток?

Втора година

1. Одреди ги вредностите на параметарот m за кои неравенството

$\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4}<0$ е исполнето за секој реален број x.

2. Реши ја неравенката $\sqrt{x^2-3x+2}<x+3$.

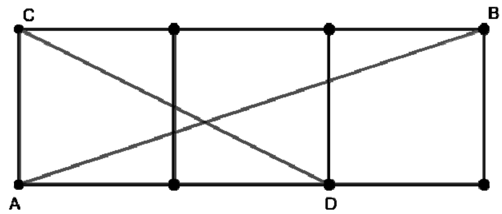
3. Докажи дека геометриското место на темињата на параболите $y=x^2-2(k+1)x+k-3$, каде $k\in\mathbb{R}$, е парабола. Одреди ја равенка на добиената парабола.

4. Конструирај триаголник ABC ако се дадени правата p која ја содржи страната AB и точките D и E кои се подножја на висините на триаголникот спуштени од темињата A и B соодветно.

Трета година

1. Колку изнесува аголот во темето C на ΔABC, ако важи $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$, каде $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}$ и $c=\overline{AB}$.

2. Дадени се три квадрати со иста страна, како на цртежот. Одреди ја големината на аголот меѓу правите AB и CD.



3. Нека A, B, C и D се различни точки од кружницата, такви што $\overline{AB}=\overline{BC}$ и $\overline{AD}=\overline{BC}+\overline{CD}$. Одреди го аголот BAD.

4. Пресметај го бројот на четириелементните подмножества $\{a,b,c,d\}\subset\{1,2,3,.....,1990\}$ за чии елементи важи услов $a+b=c+d=1990$.

Четврта година

1. За реалните броеви a,b и c важи $(a+b+c)\cdot c<0$. Докажи дека $b^2>4ac$.

2. Одреди ги функциите $f(x)$ и $g(x)$ за кои важи

$$\begin{cases} f(3x-2)+7g(x-5)=x+1 \\ f(x+1)-g\left(\frac{x}{3}-4\right)=3x \end{cases}.$$

3. а) Најди ја реалната функција $g(x)$ ако $f(x)=3x+2$ и $f\left(x^2+xg(x)\right)=3x^2+6x+5$, за секој $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

б) Нека $f(x)=x+2$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Најди функција $g(x)$, таква што $f(g(f(x)))=5x-1$.

4. Докажи ја инверзибилноста на функцијата $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, определена со

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+1, x\leq 0 \\ 1-x, x>0 \end{cases}.$$

Подготвиле:
Анета Гацовска-Барандовска
Emin Durmishi
Јасмина Маркоска
Зоран Штерјов

РУБРИКА ЗАДАЧИ

Ги покануваме учениците да испраќаат решенија на задачи од оваа рубрика. Решенијата да бидат подготвени во MS Word. Испратете ги на електронската адреса на списанието

sigma.spisanie.smm@gmail.com

со предмет „Рубрика Задачи“. Ве молиме решенијата испратете ги во еден word документ (doc или docx формат). Со решенијата испратете: име и презиме, година, училиште и град. **Краен рок за испраќање на решенија е 31 март 2020.** Некои од решенијата ќе бидат објавени во наредниот број на Сигма и ќе бидат објавени имињата на сите ученици кои точно ја решиле задачата, а најуспешните решавачи во текот на учебната година ќе бидат симболично наградени.

1546. Реши ја равенката во множеството на реалните броеви:

$$x^5+(x+1)^5+(x+2)^5+...+(x+2020)^5=0$$

1547. Определи ги сите ненегативни цели броеви x и y за кои

$$(xy-7)^2=x^2+y^2$$

1548. Докажи дека $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{k^2}<1$

1549. Реши го системот равенки $\begin{cases} xy=1 \\ x+y+\cos^2 z=2 \end{cases}$

1550. Кој број е поголем $\sqrt{2019}+\sqrt{2021}$ или $2\sqrt{2020}$?

1551. Отсечките $\overline{AD}$ и $\overline{BE}$ се висини во ΔABC. Правата низ точката D паралелна со AC ја сече AB во точка P. Правата низ точката E паралелна со BC ја сече AB во точка Q. Докажи дека точките D,E,P,Q лежат на една кружница.

1552. Нека ABC е правоаголен триаголник со прав агол во темето C, а F е подножјето на висината спуштена од темето C. Нека кружница k ја допира отсечката FB во точка P, висината CF во точка Q и опишаниот круг околу триаголникот ABC во точка R. Докажи дека точките A, Q и R се колинеарни и дека $\overline{AP}=\overline{AC}$.

1553. Докажи дека природниот број $\underbrace{11...1}_{2020}\underbrace{22...2}_{2020}$ е производ на два последователни природни броја.

1554. Нека $m,n\in\mathbb{N}$. Ако $НЗД(m,n)+НЗС(m,n)=m+n$ тогаш $m\,|\,n$ или $n\,|\,m$. Докажи.

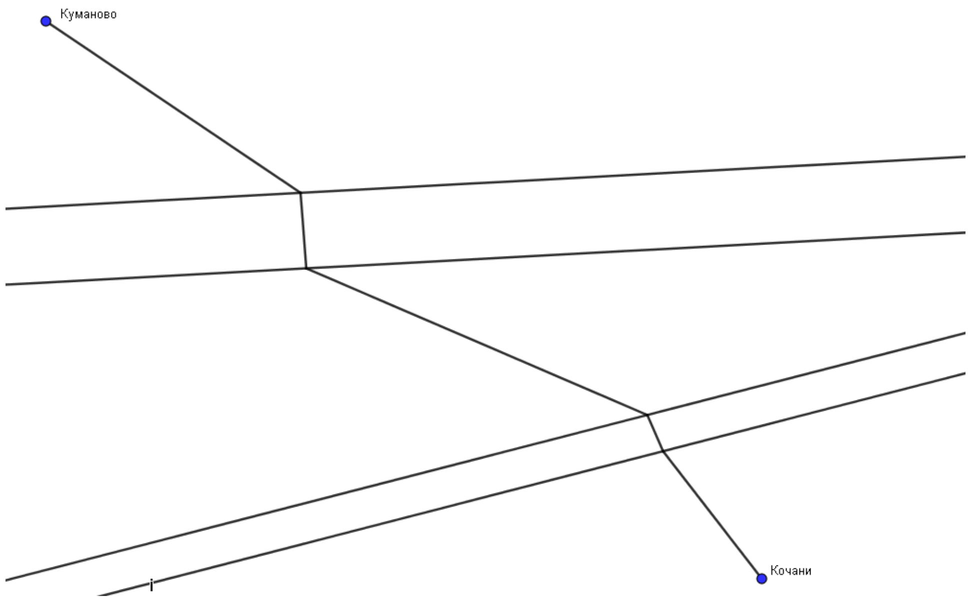
1555. Нека a и b се позитивни реални броеви за кои равенките $x^2+ax+2b=0$ и $x^2+2bx+a=0$ имаат само реални корени. Најди ја минималната вредност на збирот $a+b$.

1556. Докажи дека $\sin 1^\circ$ е ирационален број.

1557. Нека x, y, z се ненегативни реални броеви чиј збир е 4. Докажи дека $xy^2 + 3yz \leq 12$

1558. Најди ги симетралите на аглите кои ги определуваат следните две прави $x + 8y = 12$ и $4x + 7y = 5$.

1559. Од Куманово до Кочани треба да се изгради пат со најмала должина така што преку две реки треба да се конструираат 2 моста нормално на течение на реките. Во кои точки треба да се конструираат мостовите, за да вкупниот пат биде минимален?



1560. Дадени се две кружници со периметар 100. На едната од нив се дадени 100 точки, а на другата се означени неколку кружни лакови така што збирот на нивните должини е помал од 1. Докажи дека првата кружница може да се постави врз другата така што ниедна од дадените точки нема да падне во означен кружен лак.

Подготвиле:
Јилмаз Деликташ
Раде Кренков
Слаѓан Станковиќ