СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

EGMO 2020 - Тест за избор на МКД 4

29.02.2020

1. Нека S е подмножество од $\{1, 2, \ldots, 2019\}$ со следнава особина: за секои три броеви $a, b, c \in S$ важи $2020 \nmid a+b+c$ и $2020 \nmid a+b-c$. Колку најмногу елементи може да има множеството S? (Одговорот да се образложи.)

Решение. Да го нарекуваме секое S со наведените особини *добро.* Најпрво да забележиме дека постои добро множество S кое има 1010 елементи: на пример, такво е подмножеството од сите непарни броеви од $\{1, 2, \ldots, 2019\}$.

(1 поен)

За да докажеме дека 1010 е најголемиот можен број на елементи во добро множество, доволно е да докажеме дека не постои добро множество со 1011 елементи.

(1 поен)

Претпоставувајќи го спротивното, нека $S = \{d_0, d_1, \ldots, d_{1010}\}$ е добро множество. Да ги разгледаме следните (незадолжително различни) броеви:

$$d_1, d_2, \ldots, d_{1010}, d_0 + d_1, d_0 + d_2, \ldots, d_0 + d_{1010}\,.$$

(2 поени)

Ниту еден од разгледаните броеви не дава остаток d_0 при делење со 2020.

(1 поен)

Согласно принципот на Дирихле, барем два од нив даваат ист остаток при делење со 2020.

(1 поен)

Следствено, постојат индекси s и t такви што d_s и $d_0 + d_t$ даваат ист остаток при делење со 2020. Но тогаш $d_0 + d_t - d_s$ е делив со 2020, што е посакуваната противречност.

(1 поен)

$\square$

2. Докажете дека во секој конвексен шестаголник со плоштина P постои дијагонала која отсекува триаголник со плоштина $\leq \frac{P}{6}$. Дали оваа оценка може да биде подобрена?

Решение. Да ги означиме пресечните точки на главните дијагонали AD, BE и CF на конвексен шестаголник $ABCDEF$ со P, Q и R, соодветно (како што е прикажано на долниот цртеж.) Тогаш

$$P_{AQB} + P_{BQC} + P_{CRD} + P_{DRE} + P_{EPF} + P_{FPA} = P_{ABCDEF} - P_{PQR} \leq P_{ABCDEF}\,.$$

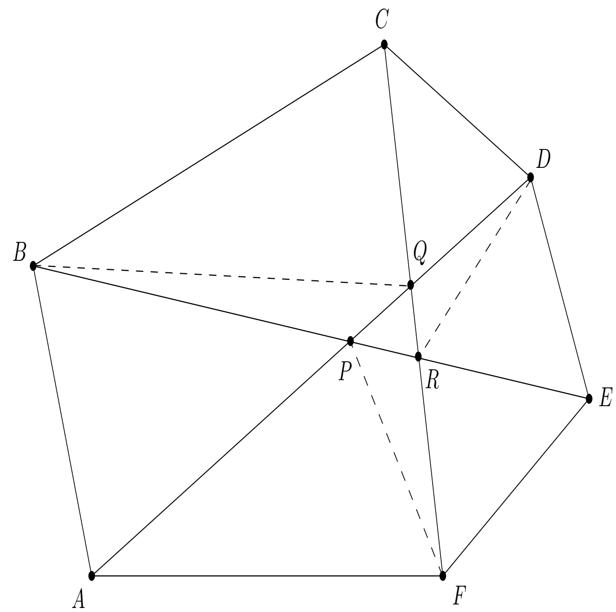
(2 поени)

Барем еден од собироците на левата страна не надминува $\frac{P}{6}$, каде $P = P_{ABCDEF}$.

(1 поен)

Нека, на пример, $P_{DRE} \leq \frac{P}{6}$. Во тој случај, ако $CF \parallel DE$ тогаш $P_{DEC} = P_{DER} \leq \frac{P}{6}$.

(1 поен)



Ако пак $CF \nparallel DE$ тогаш $\min\{P_{CDE}, P_{DEF}\} < P_{DRE} \leq \frac{P}{6}$.

(2 поени)

Да забележиме дека докажаната оценка не може да биде подобрена: имено, плоштините на триаголниците отсечени од дијагоналите $AC, BD, \ldots, EA$ во правилен шестаголник $ABCDEF$ се еднакви на $\frac{P}{6}$.

(1 поен)

□

3. Нека p е непарен прост број. Докажете дека секој природен број d таков што $d \mid 2^p - 1$ дава остаток 1 при делење со $2p$.

Решение. Доволно е да разгледаме произволен прост делител q на $2^p - 1$ и да покажеме дека $q \equiv_{2p} 1$ (бидејќи $x \equiv_{2p} 1$ и $y \equiv_{2p} 1$ повлекува $xy \equiv_{2p} 1$).

(1 поен)

Јасно е дека q е непарен (прост) број. Нека $\delta = \text{ord}_q(2)$.

(1 поен)

Од $2^p \equiv_q 1$ и $2^{q-1} \equiv_q 1$ следува дека $\delta | (p, q-1)$.

(1 поен)

Оттука, $\delta \in \{1, p\}$.

(1 поен)

Ако $\delta = 1$, тогаш $2^\delta = 2 \equiv_q 1$ повлекува дека $q = 1$, што не е случај.

(1 поен)

Значи, $\delta = p$, што повлекува дека $p \mid q - 1$.

(1 поен)

Бидејќи p е прост, следува дека $2p \mid q - 1$.

(1 поен)

□