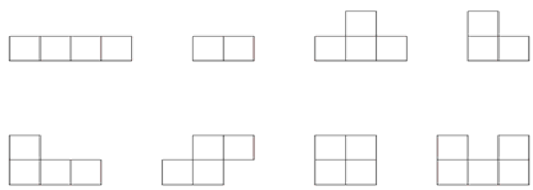
СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

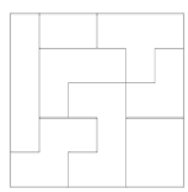
EGMO 2020 - Втор тест за избор на МКД екипа

23.02.2020

4. Дали постои паркетирање на правоаголник 10×6 со по две копии на секоја од следниве фигури? (Одговорот да се образложи.)



Решение. Одговорот е потврден. Имено, правоаголник 10×6 може да се паркетира со помош на две копии на правоаголник 6×5. Од друга страна, постои паркетирање на правоаголник 6×5 со горенаведените фигури:



(7 поени)

□

5. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ е избрана точка P. Нека D, E и F се подножја на нормалите спуштени од P врз правите BC, CA и AB, соодветно. Нека S е средна точка на страната AB. Покажете дека следниве две тврдења се еквивалентни:

(1) FP е бисектриса во $\triangle DEF$
(2) $|SD| = |SE|$.

Решение. Од тетивноста на $AEPF$ и $BDPF$, имаме $\angle EFP = \angle CAP$ и $\angle DFP = \angle CBP$.

(1 поен)

Нека L и M се средни точки на отсечките AP и BP, соодветно. Тогаш $|EL| = |PL| = |MS|$, $|DM| = |PM| = |LS|$ и $\angle PLS = \angle PMS$.

(2 поени)

Следствено, $\angle ELS = 2\angle CAP + \angle PLS$ и $\angle DMS = 2\angle CBP + \angle PMS$. Заклучуваме дека тврдењето (1) е еквивалентно со следново тврдење: (3) $\angle ELS = \angle DMS$.

(2 поени)

Од друга страна, означувајќи $x = |EL|$ и $y = |DM|$, имаме (согласно косинусна теорема)

$$|SE|^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\angle ELS$$
$$|SD|^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos\angle DMS\,.$$

(1 поен)

Следува дека и тврдењето (2) е еквивалентно со тврдењето (3).

(1 поен)

□

6. Нека $p \mid a^{2^n} + b^{2^n}$ и $p \nmid ab$, каде $a, b \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ и p е непарен прост број. Покажете дека p дава остаток 1 при делење со 2^{n+1}.

Прво решение. Согласно условот на задачата и малата теорема на Ферма, имаме

$$p \mid a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}} \quad \text{и} \quad p \mid a^{p-1} - b^{p-1}\,.$$

(2 поени)

Нека $d = (2^{n+1}, p-1)$. Тогаш (од алгоритамот на Евклид) следува дека

$$p \mid a^d - b^d\,.$$

(2 поени)

Да претпоставиме дека p не дава остаток 1 при делење со 2^{n+1}, т.е., дека $d \mid 2^n$.

(1 поен)

Тогаш,

$$p \mid a^{2^n} - b^{2^n}\,.$$

(1 поен)

Следствено $p \mid 2a^{2^n}$. Оттука, непарноста на p повлекува дека $p \mid a$. Ова е посакуваната противречност.

(1 поен)

□

Второ решение. Нека $k = \nu_2(p-1)$. (Со други зборови, со k е означен експонентот на 2 во канонската факторизација на $p-1$.) Тогаш количникот $s = \frac{p-1}{2^k}$ е непарен природен број.

(1 поен)

Нека $a^{2^n} \equiv_p u$. Од условот на задачата следува дека $b^{2^n} \equiv_p -u$.

(1 поен)

Да претпоставиме дека p не дава остаток 1 при делење со 2^{n+1}, т.е., дека $p-1 \mid 2^n s$.

(2 поени)

Согласно направената претпоставка и малата теорема на Ферма, имаме

$$1 \equiv_p (a^{2^n})^s \equiv_p u^s \equiv_p -(-u)^s \equiv_p -(b^{2^n})^s \equiv_p -1\,.$$

(2 поени)

Но ова повлекува дека $p \mid 2$, што е посакуваната противречност.

(1 поен)

□