43 РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
8.02.2020

Прва година

1А, 2Б. (Сигма 115, стр. 16, зад. 2) Дали постои цел број x таков што броевите $\frac{14x+5}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}$ се истовремено цели броеви?

Решение 1. Дадените броеви може да ги запишеме како $\frac{14x+5}{9}=\frac{9x+5x+5}{9}=x+\frac{5(x+1)}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}=\frac{12x+5x-5}{12}=x+\frac{5(x-1)}{12}$... **(10)** Нека постои цел број x така што истовремено и двата дадени броја се цели. Ова значи дека $5(x+1)$ е содржател на 9, односно $x+1$ е содржател на 9 односно $x+1=9k, k\in\mathbb{Z}$. Аналогно, $5(x-1)$ е содржател на 12, односно $x-1$ е содржател на 12 односно $x-1=12m, m\in\mathbb{Z}$....**(5)** Од последните две равенства добиваме дека $9k-1=12m+1 \Leftrightarrow 9k-12m=2 \Leftrightarrow 3(3k-4m)=2$, каде $k,m\in\mathbb{Z}$...**(5)** Бидејќи $n=3k-4m\in\mathbb{Z}$ и $3n=2$, што не е можно за ниеден цел број n. Значи, не постои цел број x, за кој дадените броеви се истовремено цели броеви....**(5)**

Решение 2. Нека постои цел број x така што истовремено и двата дадени броја се цели. Тогаш, постојат цели броеви k и m, такви што $14x+5=9k$ и $17x-5=12m$....**(5)** Со одземање на второто и првото равенство, добиваме дека $(17x-5)-(14x+5)=12m-9k$...**(10)**, односно $3x-12m+9k=10$ или $3\cdot(x-4m+3k)=10$....**(5)** Од $x,m,k\in\mathbb{Z}$, имаме дека $n=x-4m+3k\in\mathbb{Z}$ и $3n=10$, што не е можно за ниеден цел број n. Значи, не постои цел број x, за кој дадените броеви се истовремено цели броеви....**(5)**

1Б. Ако на еден трицифрен број му се допише цифрата 1 од десно, се добива четирицифрен број кој е 3 пати поголем од бројот добиен со допишување на цифрата 2 од лево на дадениот трицифрен број. Кој е тој трицифрен број?

Решение 1. Нека бараниот трицифрен број е $\overline{abc}$. Согласно условите на задачата важи $\overline{abc1}=3\cdot\overline{2abc}$. ...**(5).** Тогаш, $1000a+100b+10c+1=3\cdot(2000+100a+10b+c)=6000+300a+30b+3c$ **...(7)** односно $700a+70b+7c=5999$. **...(8)** Оттука, $100a+10b+c=857$, па добиваме $\overline{abc}=857$. ...**(5)**

Решение 2. Нека бараниот трицифрен број е $\overline{abc}$. Согласно условите на задачата важи $\overline{abc1}=3\cdot\overline{2abc}$. ...**(5)** Единствената цифра која помножена со 3, дава производ чија цифра на единици е 1, е цифрата 7, па затоа $c=7$. **(5)** Тогаш, $\overline{ab71}=3\cdot\overline{2ab7}$. Во бројот од левата страна цифрата на десетки е 7, па производот на цифрата b и бројот 3 треба да завршува на 5, од каде се добива дека мора $b=5$. **...(5)** Тогаш, $\overline{a571}=3\cdot\overline{2a57}$, од каде производот на 3 и цифрата a треба да завршува на 4, па мора $a=8$. ...**(5)** Навистина, важи $8571=3\cdot 2857$, па бараниот трицифрен број е $\overline{abc}=857$. **...(5)**

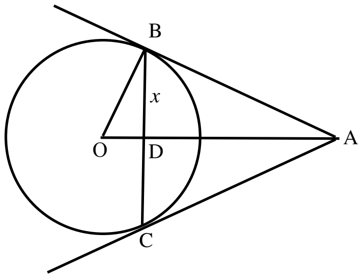
2А. Во низа се запишани 2020 реални броеви. Збирот на секој број од низата и реципрочната вредност на следниот број е еднаков на 1. Производот на сите броеви е еднаков на 2020. Кои броеви се запишани на првото и на последното место во низата?

Решение. Нека членовите од низата ги означиме со $a_1, a_2, ..., a_{2020}$. Од $a_1+\frac{1}{a_2}=1$, следува дека $a_2=\frac{1}{1-a_1}$.

Аналогно, од $a_2+\frac{1}{a_3}=1$, добиваме дека $a_3=\frac{1}{1-a_2}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-a_1}}=\frac{1-a_1}{-a_1}=1-\frac{1}{a_1}$. За четвртиот број имаме дека $a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{a_1}\right)}=a_1$. Понатаму, членовите во низата се повторуваат во тројки, односно низата е: a_1, $a_2=\frac{1}{1-a_1}$, $a_3=1-\frac{1}{a_1}$, $a_4=a_1$, $a_5=\frac{1}{1-a_1}$, $a_6=1-\frac{1}{a_1}$ итн....**(10).** Бидејќи $2020=3\cdot673+1$, следи дека последниот број е $a_{2020}=a_1$....**(5)** За производот на првите три броја имаме $a_1\cdot\frac{1}{1-a_1}\cdot\left(1-\frac{1}{a_1}\right)=\frac{a_1}{1-a_1}\cdot\frac{a_1-1}{a_1}=-1$ **....(5)** Тогаш, $2020=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\ldots\cdot a_{2020}=(-1)^{637}\cdot a_{2020}=-a_1$, од каде следува дека првиот и последниот број се $a_1=a_{2020}=-2020$ ....**(5)**

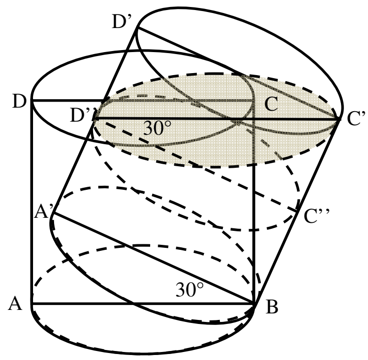
3А, 4Б. (Сигма 114, стр. 31, зад. 1521) Најди ги сите вредности на целиот број a, за кои квадратниот трином $x^2-3ax+2a^2+1$ може да се запише во обликот $(x+b)\cdot(x+c)$ каде b и c се цели броеви.
Решение. Од условот на задачата имаме дека $x^2-3ax+2a^2+1=(x+b)(x+c)=x^2+(b+c)x+bc$ ....**(5)** Од овде следува, $\begin{cases}-3a=b+c\\2a^2+1=bc\end{cases}$....**(5),** од каде $\begin{cases}c=-3a-b\\2a^2+1=-3ab+b^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-3a-b\\(a+b)(2a+b)=-1\end{cases}$... **(5).** Од тоа што a и b се цели броеви, мора да важи дека $\begin{cases}a+b=1\\2a+b=-1\end{cases}$ или $\begin{cases}a+b=-1\\2a+b=1\end{cases}$....**(5).** Од првиот систем добиваме $a=-2,b=3,c=3$, а од вториот $a=2,b=-3,c=-3$, па следува дека $a=\pm2$....**(5).**

3Б. Астронаут кој се наоѓа на висина од 525 km гледа дел од Земјата. Ако радиусот на Земјата е приближно 6300 km, пресметај го радиусот на кружната контура на делот од Земјата кој е видлив за астронаутот?
Решение. Бараниот радиус x на кружната контура на делот од Земјата видлив за астронаутот е висината BD кон хипотенузата OA во правоаголниот триаголник ABO, во кој $\overline{OA}=6300+525=6825\,\text{km}$ и $\overline{OB}=6300\,\text{km}$. Точката О е центарот на Земјата, а астронаутот се наоѓа во точката А (види цртеж)... **(10)**



Тогаш, $\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OB}^2}=\sqrt{6825^2-6300^2}=2625\,\text{km}$. **...(3).** Од сличноста на триаголниците ABO и ADB, двата се правоаголни и имаат еден заеднички агол ...**(5)**, имаме дека $\overline{OA}:\overline{OB}=\overline{BA}:\overline{BD}$, односно $6825:6300=2625:x$, од каде $x=\frac{6300\cdot2625}{6825}=\frac{44100}{91}\,\text{km}$ ... **(7)**

4А. Дијаметарот на кружната основа на еден цилиндричен сад е еднаков на неговата висина. Садот се наоѓа на хоризонатална површина и е целосно наполнет со течност. Дали ако го навалиме садот така да неговата основа зафаќа агол од 30° со првобитната положба на основата, од садот ќе истече помалку или повеќе од третина од течноста во него? Образложи го одговорот.



Решение. Ако го навалиме цилиндричниот сад така да неговата основа зафаќа агол од $30°$ со првобитната положба на основата, тогаш по истекувањето, течноста ќе заземе хоризонтална положба $D"C'\| AB$ (види цртеж). Количината на истечената течност е еднаква на половината од волуменот на цилиндарот со оскин пресек $D"C"C'D'$....**(5)** Нека $x=\overline{C"C'}$ е висината на овој цилиндар кој има еднаква основа со дадениот цилиндар, па $\overline{D"C"}=2R$, каде R е радиусот на на основата на дадениот цилиндар. Правоаголниот триаголник $C'C"D"$ е половина од рамностран триаголник, затоа што $\measuredangle C'D"C"=\measuredangle ABA'=30°$, како агли со заемно паралелни краци, па затоа $\overline{D"C'}=2x$....**(5)** Од Питагоровата теорема имаме $\overline{D"C"}^2+\overline{C"C'}^2=\overline{D"C'}^2$, односно $(2R)^2+x^2=(2x)^2$, од каде се добива $x=\frac{2\sqrt{3}\,R}{3}$....**(7)** Висината на дадениот цилиндар е $H=2R$, па неговиот волумен е $V=R^2\pi\cdot H=R^2\pi\cdot 2R$. Тогаш, волуменот на истечената вода е $V_1=\frac{1}{2}\cdot R^2\pi\cdot x=\frac{1}{2}\cdot R^2\pi\cdot\frac{2\sqrt{3}R}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot R^2\pi\cdot 2R=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot V<\frac{1}{3}\cdot V$, односно од садот ќе истече помалку од третина од течноста.... **(8)**

Втора година

1АБ. (Сигма 114, стр. 29, зад. 2) Најди ги сите природни броеви n за кои $n^2+25n+19$ е полн квадрат.
Решение: Споредувајќи го изразот $n^2+25n+19$ со блиските полни квадрати, може да забележиме дека $n^2+25n+19$ е ограничено со $(n+4)^2$ и со $(n+13)^2$, односно важи $(n+4)^2<n^2+25n+19<(n+13)^2$ **... (8)**. Оттаму, вредноста $n^2+25n+19$ може да биде еднаква со еден од следните полни квадрати $(n+5)^2,(n+6)^2,...,(n+12)^2$ **...(7)**. Ќе ги разгледаме сите можности поединечно. Ако $n^2+25n+19=(n+5)^2$, тогаш $25n+19=10n+25$, односно $15n=6$, но овде вредноста на n не е природен број. Истата постапка ја повторуваме за секоја можност на полниот квадрат. Се добиваат решенија $n\in\{5,34,125\}$ **...(10)**.

2АБ. (Сигма 115, стр. 26. зад. 1531) Реши го системот равенки во множеството на природни броеви.

$$\begin{cases} x+\frac{1}{y}=2-(y-z)^2 \\ y+\frac{1}{z}=2-(x-y)^2 \\ z+\frac{1}{x}=2-(z-x)^2 \end{cases}$$

Решение: Ако сите три равенки од системот ги собереме, добиваме

$x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=6-(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2$ ...**(5)** Знаеме дека $a+\frac{1}{a}\geq 2$ е точно за сите позитивни реални броеви a. Ако ова го примениме, јасно е дека левата страна на равенката е поголема или еднаква на 6 за сите $x,y,z,$ но десната страна на равенката е помала или еднаква на 6.... **(10)** Во тој случај равенката (1) ќе биде задоволена ако и само ако и двете страни на равенката се еднакви на 6.Тоа е можно само ако $x=y=z$ ....**(5)** Заменувајќи $x=y=z$ во равенката, за решенија на системот ќе ги добиеме $x=y=z=1$.... **(5)**

3А. Ако $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ и $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$ тогаш $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Докажи.

Решение: Од $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$ добиваме $\frac{c(ay-bx)}{c^2}=\frac{b(cx-az)}{b^2}=\frac{a(bz-cy)}{a^2}$ ... **(7)**

Го користиме фактот дека ако $\frac{A}{m^2}=\frac{B}{n^2}=\frac{C}{p^2}=k$ тогаш $A=m^2k,\ B=n^2k,\ C=p^2k$ па оттука добиваме

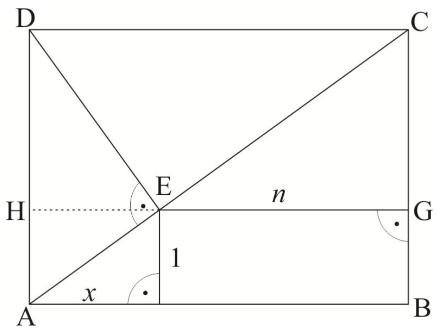
$A+B+C=m^2k+n^2k+p^2k=k\left(m^2+n^2+p^2\right)$, односно $\frac{A+B+C}{m^2+n^2+p^2}=k=\frac{A}{m^2}=\frac{B}{n^2}=\frac{C}{p^2}$. Ако ова се применува во нашиот случај добиваме $\frac{c(ay-bx)}{c^2}=\frac{c(ay-bx)+b(cx-az)+a(bz-cy)}{a^2+b^2+c^2}=0.$

Оттаму $c(ay-bx)=0$. Слично од другите две равенки добиваме $b(cx-az)=0,\ \ a(bz-cy)=0$ ....**(15)**

Од условот на задачата $a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0$, па имаме

$ay=bx \iff \frac{x}{a}=\frac{y}{b}, \quad cx=az \iff \frac{x}{a}=\frac{z}{c}, \quad bz=cy \iff \frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.Конечно $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. ...**(3)**

4А. Дијагоналите во правоаголникот $ABCD$ имаат должина d. Од темето D кон дијагоналата AC спуштена е нормала која што ја сече AC во точка E. Од точката E спуштаме нормали кон страните AB и BC, кои ги сечат AB и BC во точките F и G, соодветно. Ако $\overline{EF}=1, \overline{EG}=n$, докажи дека $d^{\frac{2}{3}}=n^{\frac{2}{3}}+1$.



Решение. Нека $\overline{AF}=x$. Тогаш, $\overline{AE}=\sqrt{x^2+1}$ …**(3)**. Нека правата EG ја сече страната AD на правоаголникот $ABCD$ во точка H. Тогаш триаголникот EDH е правоаголен и за него важи $\overline{DE}^2=\overline{DH}^2+\overline{HE}^2=\overline{DH}^2+x^2$ …**(3)**.
Од правоаголниот триаголник AED имаме $\overline{DE}^2=\overline{AD}^2-\overline{AE}^2=\overline{AD}^2-(x^2+1)=(\overline{DH}+\overline{HA})^2-(x^2+1)$
$=(\overline{DH}+1)^2-(x^2+1)$ …**(3)**. Ако ги изедначиме десните страни на претходните две равенства, добиваме
$\overline{DH}^2+x^2=(\overline{DH}+1)^2-(x^2+1)$ и оттука $x^2=2\overline{DH}+1-x^2-1$, односно $\overline{DH}=x^2$ …**(5)**. Тогаш и $\overline{CG}=x^2$ и од сличноста на правоаголните триаголници AFE и EGC важи $\frac{1}{x}=\frac{x^2}{n}$, односно $n=x^3$ или $x=n^{\frac{1}{3}}$ …**(5)**. Од правоаголниот триаголник ABC следува $d^2=(x+x^3)^2+(1+x^2)^2=(1+x^2)^2(1+x^2)=(1+x^2)^3$ и оттука $d^{\frac{2}{3}}=1+x^2=1+n^{\frac{2}{3}}$, што требаше да се докаже …**(6)**.

3Б. Реши ја равенката во множеството на цели броеви $\frac{x+6}{y}+\frac{10}{xy}=\frac{y-4}{x}$.

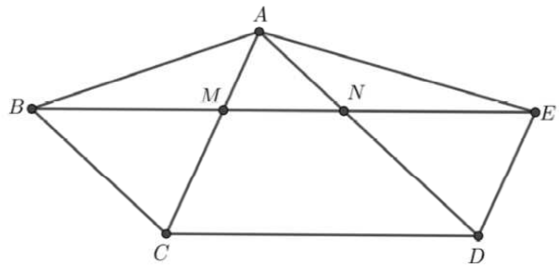
Решение. Јасно, $x, y \neq 0$. После неколку еквивалентни трансформации: $x^2+6x+10=y^2-4y$; $x^2+6x+9+1=y^2-4y+4-4$; $(y-2)^2-(x+3)^2=5$, дадената равенка е еквивалентна со равенката $(y-x-5)(y+x+1)=5$ ...**(8)**. Имајќи предвид дека x и y се цели броеви, ги добиваме следниве случаи:

1. $\begin{cases} y-x-5=1 \\ y+x+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=5 \end{cases}$ **(4)** 2. $\begin{cases} y-x-5=-1 \\ y+x+1=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \end{cases}$ **(4)**

3. $\begin{cases} y-x-5=5 \\ y+x+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=5 \end{cases}$ **(4)** 4. $\begin{cases} y-x-5=-5 \\ y+x+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases}$ **(4)**

Значи, бараните решенија се: $(-1,5),(-5,-1),(-5,5),(-1,-1)$ ...**(1)**

4Б. Во петаголникот $ABCDE$ триаголниците ABC, BCD, CDE и DEA имаат еднакви плоштини. Правите AC и AD ја сечат BE во точките M и N, соодветно. Докажи дека $\overline{BM}=\overline{NE}$.



Решение. Од еднаквоста на плоштините на триаголниците ABC и BCD следува дека тие имаат еднакви висини спуштени од A и D кон заедничката страна BC. Затоа правите AD и BC се паралелни…**(10)**. Слично, од еднаквоста на плоштините на триаголниците BCD и CDE, следува дека правите BE и CD се паралелни …**(2)**, а од еднаквоста на плоштините на триаголниците CDE и DEA, следува дека правите AC и DE се паралелни …**(2)**. Од паралелноста на AD и BC и на BE и CD, добиваме дека четириаголникот $CDNB$ е паралелограм …**(5)**, а од паралелноста на BE и CD и на AC и DE, добиваме дека четириаголникот $CDEM$ е паралелограм. Од паралелограмот $CDNB$ следува дека $\overline{CD}=\overline{NB}$, а од паралелограмот $CDEM$ следува дека $\overline{CD}=\overline{EM}$. Затоа, $\overline{NB}=\overline{EM}$ и оттука имаме $\overline{NM}+\overline{MB}=\overline{EN}+\overline{NM}$, односно $\overline{MB}=\overline{EN}$, што и требаше да се докаже…**(6)**.

Трета година

1АБ. (Сигма 115, стр. 27, зад. 1538) Во множеството на реалните броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2 \\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2 \\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2 \end{cases}.$$

Решение. Да забележиме дека мора $x, y, z>0$. **...(3)**. Дадениот систем е еквивалентен со следните системи:

$$\begin{cases} \log_2 x+\log_{2^2} y+\log_{2^2} z=2 \\ \log_3 y+\log_{3^2} z+\log_{3^2} x=2 \\ \log_4 z+\log_{4^2} x+\log_{4^2} y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y+\frac{1}{2}\log_2 z=2 \\ \log_3 y+\frac{1}{2}\log_3 z+\frac{1}{2}\log_3 x=2 \\ \log_4 z+\frac{1}{2}\log_4 x+\frac{1}{2}\log_4 y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x+\log_2 \sqrt{y}+\log_2 \sqrt{z}=2 \\ \log_3 y+\log_3 \sqrt{z}+\log_3 \sqrt{x}=2 \\ \log_4 z+\log_4 \sqrt{x}+\log_4 \sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_2 x\sqrt{y}\sqrt{z}=2 \\ \log_3 y\sqrt{z}\sqrt{x}=2 \\ \log_4 z\sqrt{x}\sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{y}\sqrt{z}=4 \\ y\sqrt{z}\sqrt{x}=9 \\ z\sqrt{x}\sqrt{y}=16 \end{cases}$$. **(2 поена за секоја трансформација_...(10))**

Со множење на трите равенства од последниот систем добиваме $x^2y^2z^2=4\cdot 9\cdot 16$ односно $(xyz)^2=(2\cdot 3\cdot 4)^2$. Бидејќи $xyz>0$ заклучуваме дека $xyz=24$ **....(4)** На тој начин имаме дека $\frac{xyz}{x\sqrt{y}\sqrt{z}}=\frac{x\sqrt{y}^2\sqrt{z}^2}{x\sqrt{y}\sqrt{z}}=\sqrt{y}\sqrt{z}=\frac{24}{4}=6$. Значи добиваме дека $yz=36$. Со делење на последните две равенствата добиваме $x=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$ **....(4)** Аналогно се добива $xz=\frac{64}{9}$, $xy=\frac{9}{4}$ од каде следува $y=\frac{27}{8}$, $z=\frac{32}{3}$. Конечно добиваме решение на системот $(x,y,z)=\left(\frac{2}{3},\frac{27}{8},\frac{32}{3}\right)$. **...(4)**

Забелешка. Без разлика на начинот на решавање на системот, доаѓањето до решението да носи **12** поени.

2АБ. (Сигма 115, стр. 26, зад. 1533) Реши ја равенката во множеството на реалните броеви $\sqrt{\sin x-\sqrt{\sin x+\cos x}}=\cos x$.

Решение. За дефиниционата област на равенката важи $\cos x\geq 0$ и $\sin x\geq\sqrt{\sin x+\cos x}\geq 0$ **....(5)** Од друга страна за позитивниот $\sin x$ знаеме дека $\sin x\leq\sqrt{\sin x}$, па од $\cos x\geq 0$ важи и $\sin x\leq\sqrt{\sin x+\cos x}$. Тогаш равенката ќе биде возможна ако и само ако $\sin x=\sqrt{\sin x+\cos x}$ **....(10)** Од последново, заради позитивноста на двете страни на равенството, со квадрирање добиваме равенка $\sin^2 x=\sin x+\cos x \Leftrightarrow \sin^2 x-\sin x=\cos x$. Последното равенство е еднакво на $\sin x(\sin x-1)=\cos x$, каде $\sin x,\cos x\geq 0$, а $\sin x-1\leq 0$. Тогаш равенство важи ако и само ако $\sin x=1$, па јасно мора $\cos x=0$. **...(8)** Значи, решение на равенката е $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, каде $k\in\mathbb{Z}$ **....(2)**

3А. Дадено е множеството квадратни функции $f(x)=ax^2+bx+c$, за кои $a<b, f(x)\geq 0$ за секое $x\in\mathbb{R}$. Најди ја најмалата вредност на изразот $A=\frac{a+b+c}{b-a}$.

Решение 1. Од својствата на квадратните функции и $f(x)\geq 0$ за секое $x\in\mathbb{R}$, мора да важи системот неравенки

$$\begin{cases}a>0\\ D\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ b^2-4ac\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ b^2\leq 4ac\end{cases},$$ односно $a>0$, $\frac{b^2}{4a}\leq c$. Од условот $a<b$, јасно е дека $b-a>0$. Сега веќе е јасно дека $a,b,c>0$. **...(10)** За вредноста на изразот A добиваме

$$A=\frac{a+b+c}{b-a}\geq\frac{a+b+\frac{b^2}{4a}}{b-a}=\frac{4a^2+4ab+b^2}{4a(b-a)}.$$ Ако ставиме $b-a=y>0$ односно $b=a+y$, имаме

$$A\geq\frac{4a^2+4a(a+y)+(a+y)^2}{4ay}=\frac{9a^2+6ay+y^2}{4ay}=\frac{6ay}{4ay}+\frac{9a^2+y^2}{4ay}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2ay}\cdot\frac{9a^2+y^2}{2}\geq\frac{3}{2}+\frac{1}{2ay}\sqrt{9a^2y^2}=$$

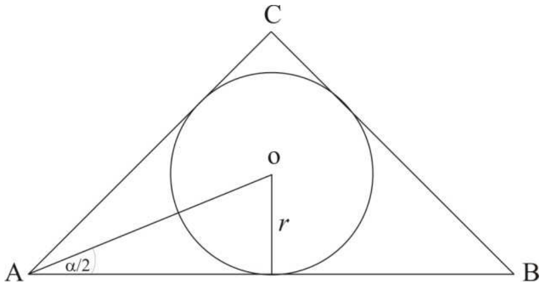
$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2ay}3ay=\frac{6}{2}=3.$$ **....(10)** Најмалата вредност која A ја достигнува е $A=3$, а се добива за $\begin{cases}9a^2=y^2\\ c=\frac{b^2}{4a}\end{cases}$.

Јасно, $y=3a$, $b=a+y=4a$, $c=4a$. Значи $A_{\min}=3$ за $b=c=4a$. **...(5)**

Решение 2. Од својствата на квадратните функции важи $a>0, \frac{b^2}{4a}\le c$. Нека $t=\frac{b}{a}$. Јасно $t>1$.

Оттука добиваме $A=\frac{a+b+c}{b-a}=\frac{b-a+2a+c}{b-a}=1+\frac{2a+c}{b-a}\ge 1+\frac{2a+\frac{b^2}{4a}}{b-a}=1+\frac{8+t^2}{4(t-1)}=1+B.$ **...(12).** За минималноста на B добиваме $B=\frac{t^2+8}{4(t-1)}=\frac{(t-4)^2+8(t-1)}{4(t-1)}=\frac{(t-4)^2}{4(t-1)}+2\ge 2.$ **…(8).** Да забележиме дека B достигнува најмала вредност 2 кога $\frac{(t-4)^2}{4(t-1)}=0,$ т.е., за $t=4.$ Според тоа $b=4a$. На крај добиваме $A_{\min}=1+B_{\min}=1+2=3$. Најмалата вредност за A изнесува 3 и се достигнува кога $b=c=4a.$ **….(5)**

4А. Нека O е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC. Докажете дека
$\overline{AO}^2\cdot\overline{BC}+\overline{BO}^2\cdot\overline{AC}+\overline{CO}^2\cdot\overline{AB}=\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AC}.$



Решение. Користејќи стандардни ознаки за триаголникот, каде r е радиусот на впишаната кружница, добиваме $\overline{AO}=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. **...(5)** Според косинусната теорема за триаголникот важи $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$, па добиваме равенство

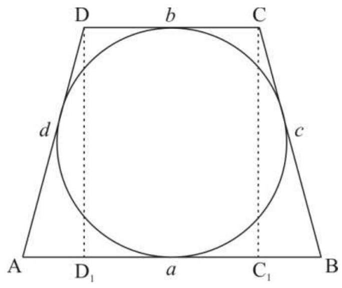
$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$ од каде изразуваме $$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)=\frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{4bc}=$$
$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4}\cdot\frac{1}{bc}=\frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$ Според тоа, со замена од погоре добиваме дека $\overline{AO}^2=\frac{r^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{r^2bc}{(s-b)(s-c)}$.... **(13)** Аналогни равенки може да се напишат и за $\overline{BO}^2$ и $\overline{CO}^2$, па според тоа левата страна на равенството станува

$$\overline{AO}^2\cdot\overline{BC}+\overline{BO}^2\cdot\overline{AC}+\overline{CO}^2\cdot\overline{AB}=\frac{r^2abc}{(s-b)(s-c)}+\frac{r^2abc}{(s-c)(s-a)}+\frac{r^2abc}{(s-a)(s-b)}=$$
$$=\frac{r^2abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}(s-a+s-b+s-c)=\frac{r^2abc\cdot s}{(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{P^2\cdot abc}{P^2}=abc$$

што е точно десната страна на бараното равенство**....(7)**

3Б. Околу кружница со радиус r опишан е трапез чии агли при подолгата основа се α,β. Докажете дека односот на плоштините на трапезот и кругот е $\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right)$.

Решение. Нека C_1, D_1 се подножјата на висините спуштени од C и D врз основата AB. Трапезот е тангентен, па неговата висина е $2r$ и важи $a+b=c+d$ **....(7)**



Од ΔAD_1D добиваме $\overline{AD}=d=\dfrac{2r}{\sin\alpha}$, а од ΔBC_1C имаме $\overline{BC}=c=\dfrac{2r}{\sin\beta}$.
...(10) Тогаш за плоштината на трапезот добиваме

$$P=\frac{a+b}{2}\cdot 2r=\left(c+d\right)\cdot r=r\left(\frac{2r}{\sin\beta}+\frac{2r}{\sin\alpha}\right)=2r^2\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right) \text{....(5)}$$

Плоштината на кругот е $r^2\pi$, па со делење го добиваме бараниот соодност на плоштините на трапезот и кругот.**...(3)**

4Б. Нека a,b се позитивни реални броеви за кои важи $ab=1$. Докажи го неравенството

$$(a^5+a^4+a^3+a^2+a+1)(b^5+b^4+b^3+b^2+b+1)\ge 4(a^2+a+1)(b^2+b+1).$$

Кога важи знакот за равенство?

Решение. Со разложување $a^5+a^4+a^3+a^2+a+1=a^3(a^2+a+1)+a^2+a+1=(a^3+1)(a^2+a+1)$ **....(5)** Аналогно се добива израз и за вториот множител на левата страна на неравенството. Тогаш може да се изврши кратење на еднаквите изрази на двете страни, со што почетното неравенство е еквивалентно со неравенството $(a^3+1)(b^3+1)\ge 4$ **....(5)** По услов a,b се позитивни реални броеви, па од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме $a^3+1\ge 2\sqrt{a^3}$, $b^3+1\ge 2\sqrt{b^3}$ **....(10)** Множејќи ги последните две неравенства добиваме $(a^3+1)(b^3+1)\ge 4\sqrt{a^3b^3}\overset{ab=1}{=}4$. **...(3)** Равенството важи ако и само ако $a=b=1$. **...(2)**

Четврта година

1АБ. (Сигма 114, стр.30, зад.4) Ако корените на равенката $x^3-px^2+qx-r=0$ образуваат геометриска прогресија, докажи дека $q^3=p^3r$.

Решение. Нека x_1,x_2 и x_3 се решенијата на дадената равенка. Од Виетовите формули следува дека $x_1+x_2+x_3=p,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=q,\ x_1x_2x_3=r$ **....(5)** Корените на равенката образуваат геометриска прогресија, па важи и равенството $x_2{}^2=x_1x_3$. **...(5)** Од првата равенка имаме $x_1+x_3=p-x_2$. Со замена во втората равенка добиваме: $x_2\left(x_1+x_3\right)+x_3x_1=q \ \Leftrightarrow\ x_2\left(p-x_2\right)+x_2{}^2=q \ \Leftrightarrow\ px_2-x_2{}^2+x_2{}^2=q$ односно $px_2=q$, од каде $x_2=\dfrac{q}{p}$. **...(8)**. Со замена на условот за прогресијата во $x_1x_2x_3=r$ добиваме дека $x_2\cdot x_2{}^2=r$, од каде $x_2{}^3=r$ **....(5)** Од последните две добиени равенства имаме $\left(\dfrac{q}{p}\right)^3=r$, од каде $q^3=rp^3$, што требаше да се докаже **...(2)**.

2А. Нека n е непарен природен број. Докажи дека множеството $A=\left\{\binom{n}{1},\binom{n}{2},\dots,\binom{n}{\frac{n-1}{2}}\right\}$ содржи непарен број на непарни броеви.

Решение. Доволно е да докажеме дека збирот на елементите на множеството A е непарен број. Нека S_n е збирот на биномните коефициенти

$\binom{n}{i}, i\in\left\{1,2,\dots,\frac{n-1}{2}\right\}$**....(5)** Бидејќи $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, за секој $k\in\left\{1,2,..,\frac{n-1}{2}\right\}$, добиваме

$$S_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}=\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n-2}+\dots+\binom{n}{\frac{n+1}{2}}\ \textbf{....(8)}$$

Оттука важи $2S_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}+\binom{n}{\frac{n+1}{2}}+\dots+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}=$

$$=\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{\frac{n-1}{2}}+\binom{n}{\frac{n+1}{2}}+\dots.+\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)-\binom{n}{0}-\binom{n}{n}=2^n-2.\ \textbf{...(10)}$$

Добивме дека $S_n=2^{n-1}-1$, значи S_n е непарен број. **...(2)**

Забелешка: Ја користевме формулата $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$. (нејзината употреба влегува во **10**-те поени во претпоследниот чекор)

2Б. Во едно населено место, сите телефонски броеви имаат по шест цифри кои се подредени по строго растечки или строго опаѓачки редослед, при што првата цифра во бројот не може да биде 0. Колкав е најголемиот број на телефонски броеви кои може да постојат во ова место?

Решение. Ќе ставиме $n=n_1+n_2$, каде n_1 е бројот на телефонски броеви кои имаат цифри по строго растечки редослед, а n_2 е бројот на телефонски броеви кои имаат цифри по строго опаѓачки редослед.**...(5)** Секој број чиишто цифри имаат *строго опаѓачки* редослед, се добива така што се избираат шест цифри од вкупно 10, кои потоа се редат од најголем до најмал. Според тоа, такви броеви може да имаме вкупно $n_2=C_{10}^6=\binom{10}{6}=\frac{10!}{6!\,4!}=210$ **....(8)** Слично, секој број чиишто цифри имаат *строго растечки* редослед се добива така што се бираат цифрите, а потоа се редаат од најмалиот до најголемиот. Овде на располагање имаме 9 цифри, бидејќи броевите не може да почнуваат на 0, а таа ќе биде најмалата цифра во секоја можна комбинација која ја содржи. Значи, $n_1=C_9^6=\binom{9}{6}=\frac{9!}{6!\,3!}=84$ **...(10)** Тогаш максималниот број на телефонски броеви кои може да постојат во ова место е $n=84+210=294$ **....(2)**

3АБ. (Сигма 115, стр.17 зад. 3) Докажи дека $\frac{1}{2021}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}<\sqrt{\frac{1}{2021}}$.

Решение. Ќе го разгледаме бројот $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}$. Важат следниве две неравенства за природен број n, $n(n+2)>n(n+1)\Leftrightarrow\frac{n}{n+1}>\frac{n}{n+2}$ **...(8)** и $n^2-1<n^2\Leftrightarrow(n-1)(n+1)<n^2\Leftrightarrow\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}$ **....(8)**

Множејќи ги неравенствата за $n\in\{1,2,\dots,2019\}$ добиени од првото неравенство, имаме

43 РЕГИОНАЛЕН НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНИТЕ УЧИЛИШТА
8.02.2020

$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}>\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2021}=\frac{1}{2021}$ **,...(3)** што е точно левата страна на неравенството во условот на задачата. За $n\in\{2,...,2020\}$ користејќи го второто неравенство се добива

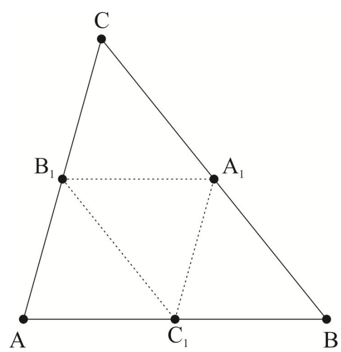
$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2020}{2021}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2020}{2019}\cdot\frac{1}{2021}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2021}$ **....(3)** Добивме $A^2<\frac{1}{2021}$ па од $A>0$ директно следи дека $A<\sqrt{\frac{1}{2021}}$ **....(3)** (**Забелешка.** Можна е и директна споредба на множителите)

4А. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи $f(f(xy))=x\cdot f(y)+3f(xy)$.

Решение. Ако во равенството од задачата променливите x и y си ги заменат местата, добиваме ново равенство $f(f(yx))=y\cdot f(x)+3f(yx)$. Бидејќи $xy=yx$, со изедначување добиваме $y\cdot f(x)=x\cdot f(y)$. **... (5)**. Ако сега замениме $y=1$, имаме $f(x)=x\cdot f(1)$. **...(5)** Натаму, ако во основното равенство од задачата замениме $x=1$, $y=1$, добиваме $f(f(1\cdot 1))=1\cdot f(1)+3f(1)$ односно $f(f(1))=4f(1)$. **...(5)** Ако во $f(x)=x\cdot f(1)$, на местото на x ставиме $f(1)$, добиваме: $f(f(1))=f(1)\cdot f(1)$. **...(5)**. Изедначувајќи ги врските за $f(f(1))$, го добивме равенството $4f(1)=f^2(1)$ или $f^2(1)-4f(1)=0$, кое има две решенија: $f(1)=0$ и $f(1)=4$. Оттука, постојат две функции со бараното својство $f_1(x)=0$ и $f_2(x)=4x\cdot$ **...(5)**

4Б. Во триаголникот ABC познати се координатите на точките $A_1(-1,0)$, средина на страната BC, $B_1(2,1)$, средина на страната AC и $C_1(0,3)$, средина на страната AB. Определи ги координатите на темињата на овој триаголник.

Решение. Најпрво определуваме едно од темињата A, B или C, а потоа со помош на средините на страните на кои лежи тоа теме, ќе ги определиме другите две темиња. Ќе ги најдеме равенките на правите AB и BC.



Од својството на средна линија на триаголник, правата AB е паралелна со правата A_1B_1, па тие имаат ист коефициент на правец, $k_{AB}=\frac{1-0}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$. Правата AB минува низ точката $C_1(0,3)$, па нејзината равенка ќе биде: $AB:\ y-3=\frac{1}{3}(x-0)$, односно $x-3y+9=0$ **....(8)** Правата BC е паралелна со правата B_1C_1 и со неа има ист коефициент на правец, $k_{BC}=\frac{3-1}{0-2}=-1$. Тогаш правата BC која минува низ точката $A_1(-1,0)$ има равенка: $BC:\ y=-(x-(-1))$, односно $x+y+1=0$ **....(4)** Координатите на точката B се решение на системот линеарни равенки формиран како пресек на правите $AB\cap BC$

$\begin{cases}x-3y=-9\\ x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4y=8\\ x+y=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\ x=-3\end{cases}$. Значи $B(-3,2)$**....(5)** Сега, за координатите на темето $C(c_1,c_2)$, користејќи ги формулите за средина на отсечка имаме $\frac{-3+c_1}{2}=-1$, $\frac{2+c_2}{2}=0$ односно $c_1=-2+3=1$, $c_2=0-2=-2$ **....(3)** Слично, за координатите на темето $A(a_1,a_2)$ имаме $\frac{-3+a_1}{2}=0$, $\frac{2+a_2}{2}=3$, од каде $a_1=0+3=3$, $c_2=6-2=4$ **....(3)** Конечно, темињата на триаголникот се $A(3,4)$, $B(-3,2)$ и $C(1,-2)$ **....(2)**