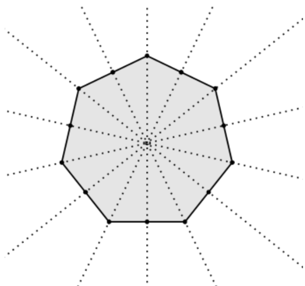
РЕШЕНИЈА НА КОНКУРСНИТЕ ЗАДАЧИ ОД НУМЕРУС XLV-2

4 одделение

3632. Во еден многуаголник со еднакви страни од едно теме можат да се повлечат 4 дијагонали. Колку страни и колку оски на симетрија има тој многуаголник?

Решение: Од едно теме во *n*-аголник може да се повлечат толку дијагонали, колку што има несоседни темиња, односно *n*-3 (ги исклучуваме самото теме и неговите две соседни темиња). Многуаголникот во кој од едно теме може да се повлечат 4 дијагонали има вкупно седум темиња, т.е. е седумаголник.

Ако седумаголникот е правилен (има и еднакви агли), тој има 7 оски на симетрија.



3633. Имаме на располагање конец со должина $\frac{1}{5}m$ и конец со поголема должина од дадената. Како без користење на метро би можеле да добиеме конец долг $3dm$?

Решение: Со помош на конецот долг $\frac{1}{5}m = 2dm$, од другиот конец ќе отсечеме конец со иста должина и потоа ќе го пресечеме на половина. Секој од добиените делови ќе биде долг $\frac{1}{10}m = 1dm$. Кога ќе ги споиме конецот долг $\frac{1}{5}m = 2dm$ и конецот долг $\frac{1}{10}m = 1dm$ ќе добиеме должина од $3dm$.

3634. Дадени се квадрат со страна x cm и рамностран триаголник со страна y cm. Одреди ги целобројните вредности за страните x и y, ако збирот на сите страни на квадратот и рамностраниот триаголник изнесува 78.

Решение: Според условот на задачата за страните важи следното равенство $4 \cdot x + 3 \cdot y = 78$, од каде $y = (78 - 4 \cdot x): 3$.

Решенијата ќе ги добиеме од следнава табела:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y = (78 - 4 \cdot x): 3$	/	/	22	/	/	18	/	/	14	/

x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$y = (78 - 4 \cdot x): 3$	/	10	/	/	6	/	/	2	/

Должините на страните се: $x = 3$ и $y = 22$ или $x = 6$ и $y = 18$ или $x = 9$ и $y = 14$ или $x = 12$ и $y = 10$ или $x = 15$ и $y = 6$ или $x = 18$ и $y = 2$.

3635. На мравката и слонот да поминат ист пат, вкупно им треба 26 години. Ако на слонот му треба онолку месеци колку на мравката години, одреди за колку години слонот и за колку години мравката ќе го поминат предвидениот пат.

Решение:
Нека времето за кое слонот ќе го помине патот е x месеци, тогаш времето за кое мравката ќе го помине патот е x години, а тоа е $12 \cdot x$ месеци. Значи, вкупниот број месеци што им требаат на мравката и слонот да го поминат патот е $x + 12 \cdot x = 13 \cdot x$. Бидејќи 26 години се $26 \cdot 12 = 936$ месеци, ќе имаме $13 \cdot x = 936$, од каде $x = 24$. Заради тоа на слонот му требаат 24 месеци, односно 2 години, а на мравката 24 години да го поминат предвидениот пат.

4-5 одделение

3636. Андријана, Бојана, Соња и Драгана стојат на една празна улица по тој редослед. Познато е дека растојанието од Бојана до Соња изнесува една третина од растојанието од Андријана до Соња, а една четвртина од растојанието од Бојана до Драгана. Ако Бојана е оддалечена од Соња на 12 метри, тогаш на кое растојание е Андријана до Драгана?

Решение. Бидејќи растојанието од Бојана до Соња е 12 метри, тогаш растојанието од Андријана до Соња е три пати поголемо и изнесува 36 метри. Слично растојанието од Бојана до Драгана е четирипати поголемо и изнесува 48 метри. Тогаш, растојанието од Андријана до Бојана е 36 – 12 = 24 метри, а растојанието од Соња до Драгана е 48 – 12 = 36 m. Конечно, растојанието од Андријана до Драгана е 24 +12 + 36 = 72 m.

3637. Марко му рекол на Дарко да го пресмета збирот на сите различни четирицифрени броеви запишани со помош на цифрите 1, 2, 3 и 4. Дарко му рекол на Марко да го пресмета збирот на сите четирицифрени броеви запишани со исти цифри само со помош на цифрите 1,2,3 и 4 и добиениот број да го помножи со 6. Кој од нив двајца добил поголем број?

Решение. Дарко ги запишал сите четирицифрени броеви запишани со цифрите 1, 2, 3 и 4, така што во ниту еден број ниту една цифра не се повторува. Има вкупно 24 такви броја:

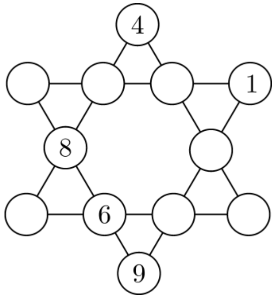
1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Забележуваме дека цифрата 1 ја има како цифра на единици во 6 различни броеви, како цифра на десетки во други 6 различни броеви, итн. Секоја цифра го има истото својство, па затоа збирот на овие броеви е шест пати по вредноста на збирот 1111+2222+3333+4444=11110 т.е. 66660. Но, истиот резултат го добил и Марко кој пресметувал

$$6 \cdot (1111 + 2222 + 3333 + 4444) = 6 \cdot 11110 = 66660.$$

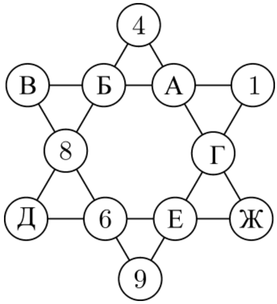
Значи, Дарко и Марко имаат ист број доколку под терминот „различни четирицифрени броеви запишани само со цифрите 1, 2, 3 и 4“ се подразбираат „четирицифрени броеви запишани само со цифрите 1, 2, 3 и 4, а во кои ниту една цифра не се повторува“. Доколку Дарко на својот збир ги додаде и броевите во кои цифрите се повторуваат, неговиот збир ќе биде поголем.

3638. Во кручињата на цртежот треба да се распоредат сите броеви од 1 до 12 така што збирот на сите четири броеви поставени по должината на секоја од шесте прави е ист.



Решение. Од цртежот се гледа дека секој број учествува во вкупниот збир по два пати, бидејќи секои две прави се сечат во точно едно крукче. Според тоа вкупниот збир е двојно поголем од вредноста на 1+2+3+...+12=78 т.е. вкупниот збир е 2 · 78 = 156, а на една од шесте прави збирот е 156 : 6 = 26.

Да ги означиме празните крукчиња со буквите А, Б, В, Г, Д, Е и Ж. Значи В=26-(8+6+9)=3. Тогаш А+Б=26-(1+3)=22. Ова е можно само ако А и Б се 10 и 12. Ако земеме дека Б=10, тогаш Д=26-(4+10+8)=4 што не е можно затоа што бројот 4 е веќе искористен. Според тоа Б=12, А=10, па имаме Д=2. Останаа уште 3 букви и три броеви 5,7 и 11. Ако Г=11, тогаш Ж=26-(11+10+4)=1 што не е можно, значи мора Е=11, од каде Ж=26-(11+6+2)=7 и Г=5.



3639. На различна буква одговара различна цифра. Замени ги буквите со цифри така што е исполнето

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & Н & У & М & Е & Р & У & С \\
 & & & М & Е & Р & У & С \\
 & & & & & Р & У & С \\
+ & & & & & & & С \\
\hline
 & 1 & 2 & 6 & 9 & Р & 8 & 8
\end{array}
$$

Решение. С може да е 7 или 2. Ако е С=2, тогаш У+У+У=8 или У+У+У=18, што не е можно, затоа што У треба да биде цифра и У не може да биде еднакво на 3. Значи, $C=7$. Сега У+У+У+2 треба да завршува на 8, а тоа е можно за У=2. Бидејќи Р+Р+Р завршува на Р следува дека Р=5. Заради 1+Е+Е=9, добиваме дека Е=4. Јасно е дека М=3 и Н=1.

5-6 одделение

3640. Производот на три природни броја е 240. Производот на првиот и вториот број е 60, а производот на првиот и третиот број е 24. Кои се тие броеви?

Решение:

Од условот на задачата следува дека

$a\cdot b\cdot c=240,\ a\cdot b=60,\ a\cdot c=24$.

Тогаш од $(a\cdot b)\cdot c=240$ и $a\cdot b=60$, имаме $60\cdot c=240$, односно $c=4$.

Заради $a\cdot c=24$ добиваме дека $a=6$.

Тогаш, од $a\cdot b=60$ добиваме дека $b=10$.

Значи, бараните броеви се $6,\ 10,\ 4$.

3641. На која цифра завршува производот

$$9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9?$$

Решение:

$9\cdot 9=9^2=81$

$9\cdot 9\cdot 9=9^3=729$

$9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=9^4=6561$

$9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=9^5=59049$

Од овие производи може да се заклучи дека бројот 9 помножен сам со себе парен број пати (степен на 9 со парен степенов показател) завршува на цифрата 1, а 9 помножен сам со себе непарен број пати (степен на 9 со непарен степенов показател) завршува на цифрата 9.

Според тоа $9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9\cdot 9=9^9$ завршува на цифрата 9.

3642. Периметарот на еден правоаголник е $48cm$. Неговата ширина е три пати покуса од должината. Одреди ја плоштината на правоаголникот.

Решение:

Периметарот на правоаголник е $L=2a+2b=48cm$.

Неговата ширина ќе ја означиме со b, а должината со a.

Тогаш важи $a = 3b$.
Заменувајќи во формулата за периметарот имаме:

$$2 \cdot 3b + 2b = 48$$

$$6b + 2b = 48$$

$$8b = 48$$

$$b = \frac{48}{8}$$

$$b = 6cm$$

Должината на правоаголникот е $a = 3 \cdot 6 = 18cm.$

Па, плоштината на правоаголниот ќе биде:

$$P = a \cdot b = 18 \cdot 6 = 108cm^2.$$

3643. Даден е рамностран триаголник со плоштина $6cm^2$. Над секоја негова страна е конструиран рамностран триаголник. Да се пресмета плоштината на добиената фигура.
Решение:
При конструкцијата, над секоја страна на рамностраниот триаголник конструираме рамностран триаголник со страна еднаква на должината на страната на дадениот триаголник, па така триаголниците над страните на дадениот триаголник имаат плоштина еднаква на плоштината на дадениот триаголник.
Плоштината на добиената фигура е четири пати поголема од плоштината на рамностраниот триаголник т.е. $P = 4 \cdot 6 = 24cm^2$.

6-7 одделение

3644. Пет овци за 8 дена јадат $120kg$ сено. Колку сено е потребно за 80 овци за 15 дена?
Решение: Ако

5 овци за 8 дена јадат $120kg$ сено, тогаш

1 овца за 8 дена јаде $120:5 = 24kg$ сено.

1 овца за 1 ден јаде $24:8 = 3kg$.

80 овци за 1 ден јадат $3 \cdot 80 = 240kg$ сено,

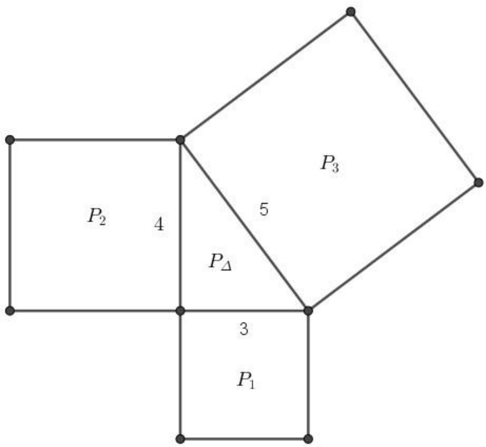
80 овци за 15 дена ќе изедат $15 \cdot 240 = 3600kg$ сено.

3645. Ако бројот 860 се подели со некој број, се добива остаток 9. Ако бројот 1 200 се подели со истиот број се добива остаток 16. Колку е количникот при делење на бројот 860 со тој број, а колку е количникот при делење на бројот 1 200 со тој број?
Решение:
Нека x е бројот со кој се делат броевите 860 и 1 200, и нека k_1е количникот кој се добива при делење на 860 со x, а k_2 е количникот при делење на 1 200 со x.
Тогаш имаме:

860 = $x \cdot k_1 + 9$	1200 = $x \cdot k_2 + 16$
$x \cdot k_1$ =860 - 9	$x \cdot k_2$ = 1200 - 16
$x \cdot k_1$=851	$x \cdot k_2$ = 1184
851 = 37 · 23	1184 = 37 · 32

Количникот при делење на 860 со 37 е 23, а количникот при делење на 1200 со 37 е 32.

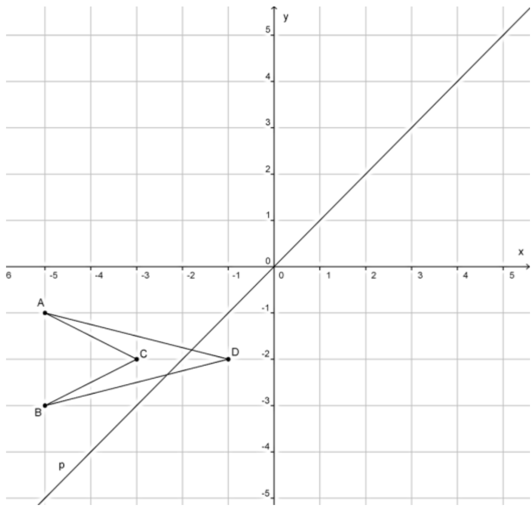
3646. Страните на еден правоаголен триаголник се последователни броеви. Периметарот на правоаголниот триаголник е $12dm$. Над секоја страна од триаголникот е конструиран квадрат. Одреди ја плоштината на добиената фигура.
Решение:



Страните на триаголникот се последователни броеви и ги означуваме со $x-1$, x и $x+1$. Тогаш од периметарот на триаголникот е $12dm$, добиваме $x-1+x+x+1=12dm$, од каде со решавање на равенката имаме $3x=12dm$, т.е. $x=4dm$. Следува дека страните на триаголникот имаат должини $3dm$, $4dm$ и $5dm$. Плоштината на правоаголниот триаголникот е половина од плоштината на правоаголникот со страни $3dm$ и $4dm$, односно $P_\Delta=\frac{3\cdot4}{2}dm^2=6dm^2$, а плоштините на квадратите се: $P_1=3\cdot3dm^2=9dm^2$, $P_2=4\cdot4dm^2=16dm^2$ и $P_3=5\cdot5dm^2=25dm^2$. Плоштината на добиената фигура е

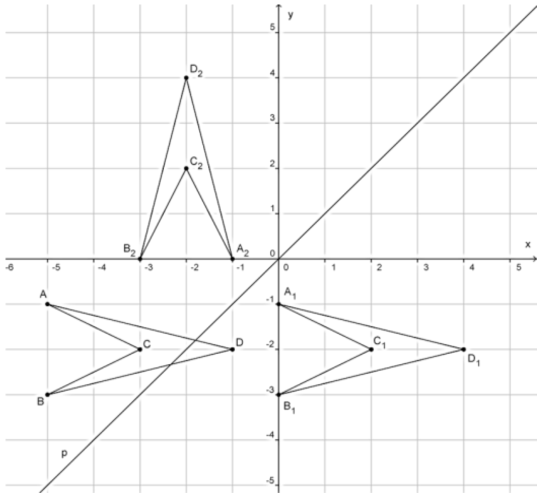
$$P=P_1+P_2+P_3+P_\Delta=9+16+25+6=56dm^2.$$

3647. На цртежот е даден четириаголникот $ABCD$.



Четириаголникот $ABCD$ транслатирај го за 5 единици надесно, а потоа добиениот четириаголник пресликај го со осна симетрија во однос на правата p. Кои се координатите на четириаголникот добиен по транслацијата и на четириаголникот добиен по осната симетрија? Што заклучуваш за добиените координати?

Решение:



Координатите на четириаголникот добиен по транслацијата се: $A_1(0,-1)$, $B_1(0,-3)$, $C_1(2,-2)$ и $D_1(4,-2)$.

Координати на четириаголникот добиени по осната симетрија на четириаголникот добиен со транслација се:

$A_2(-1,0)$, $B_2(-3,0)$, $C_2(-2,2)$ и $D_2(-2,4)$.

Координатите на темињата на четириаголникот A_2, B_2, C_2 и D_2 се добиваат ако координатите на темињата на четириаголникот A_1, B_1, C_1 и D_1 си ги заменат местата, т.е. секоја прва координата станува втора и обратно.

7-8 одделение

3648. Во спортска продавница патиките се продавале за 900 денари поефтино од тренерката. На акција патиките биле намалени за 10%, а тренерката за 5%. Габи купила патики и тренерка на намаление и за нив платила вкупно 5480 денари. Колку чинеле патиките, а колку тренерката пред намалувањето?

Решение:

Нека цената на патиките пред намалувањето била p денари. Тогаш цената на тренерката пред намалувањето била $p+900$ денари. После намалувањето важи:

$$\frac{90}{100}p+\frac{95}{100}(p+900)=5480.$$

Со решавање на оваа равенка добиваме дека $p=2500$, односно пред намалувањето патиките чинеле 2500 денари, а тренерката $2500+900=3400$ денари.

3649. Целите броеви x, y и z при делење со бројот 7 даваат остаток 4, 5 и 6 соодветно. Докажи дека бројот $A=4x+5y+6z$ е делив со 7.

Решение: Броевите x, y и z може да ги запишеме како $x=7k+4$, $y=7m+5$ и $z=7n+6$, каде што k, m и n се цели броеви. Со замена во бројот A добиваме:

$$A=4x+5y+6z=4(7k+4)+5(7m+5)+6(7n+6)=$$
$$=7(4k+5m+6n)+(16+25+36)=7(4k+5m+6n)+77=$$
$$=77(4k+5m+6n+11)$$

Следува дека $7\mid A$.

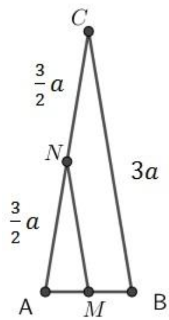
3650. Рамнокракиот триаголник ΔABC со основа AB има крак 3 пати подолг од основата. Ако M е средина на основата, а N средина на кракот AC, тогаш периметарот на четириаголникот $BCMN$ е за $36cm$ поголем од периметарот на триаголникот ΔMNA. Колку е периметарот на триаголникот ΔABC?

Решение: Од

$$L_{BCMN}=\frac{a}{2}+3a+\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}a=\frac{a}{2}+6a,$$

$$L_{\Delta MNA}=\frac{a}{2}+\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}a=\frac{a}{2}+3a \text{ и}$$

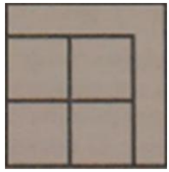
$$L_{BCMN}=L_{\Delta MNA}+36cm$$



следува $a=12cm$, а кракот има должина $3\cdot 12cm=36cm$. Следува дека периметарот на триаголникот е

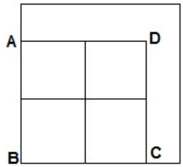
$$L_{\Delta ABC}=12+36+36=84cm.$$

3651. Плоштината на големиот квадрат на сликата е $64cm^2$. Квадратот е поделен на пет дела, четири квадрати и еден многуаголник, со еднакви плоштини. Колку изнесува периматарот на многуаголникот?



Решение:

Страната на големиот квадрат е $8cm$. Периметарот на многуаголникот е еднаков на периметарот на големиот квадрат бидејќи $\overline{AB}=\overline{AD}$ и $\overline{BC}=\overline{CD}$. Следува периматарот на многуаголникот е $32cm$.



8-9 одделение

3652. Пресметај $\dfrac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}}:0{,}015^7$.

Решение:

$$\frac{2^3\cdot 4^5\cdot 6^7}{8^9\cdot 10^{11}}:0{,}015^7=\frac{2^3\cdot\left(2^2\right)^5\cdot(2\cdot 3)^7}{\left(2^3\right)^9\cdot 10^{11}}:\left(\frac{15}{1000}\right)^7=$$

$$=\frac{2^3\cdot 2^{10}\cdot 2^7\cdot 3^7}{2^{27}\cdot 10^{11}}\cdot\left(\frac{10^3}{3\cdot 5}\right)^7=\frac{2^{20}\cdot 3^7}{2^{27}\cdot 10^{11}}\cdot\frac{10^{21}}{3^7\cdot 5^7}=$$

$$=\frac{1}{2^{27-20}}\cdot\frac{10^{21\text{-}11}}{5^7}=\frac{10^{10}}{2^7\cdot 5^7}=\frac{10^{10}}{(2\cdot 5)^7}=\frac{10^{10}}{10^7}=10^3=1000.$$

3653. Се формираат сите различни производи од по два множители од првите пет прости броеви $(2\cdot 3, 2\cdot 5,\ldots)$. Колку е квадратен корен од производот на квадратните корени на сите вакви производи?

Решение: Ќе ја решиме задачата поопшто – за произволни броеви a,b,c,d и e (со ист знак).

Сите производи со по два множители од дадените броеви се:

$ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce$ и de – вкупно 10.

(Производите ab и ba се различни записи на еден производ и не ги броиме два пати, како различни, туку еднаш.)

За бараниот корен имаме:

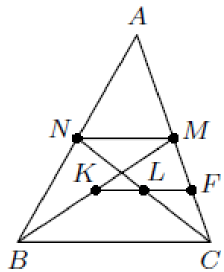
$$\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{ac}\sqrt{ad}\sqrt{ae}\sqrt{bc}\sqrt{bd}\sqrt{be}\sqrt{cd}\sqrt{ce}\sqrt{de}} =$$

$$=\sqrt{\sqrt{(abcde)^4}} = \sqrt[4]{(abcde)^4} = abcde$$

Конкретно за $a=2$, $b=3$, $c=5$, $d=7$, $e=11$, бараниот корен е $2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11 = 2310.$

3654. Должината на една од страните во триаголникот ΔABC е $20\,cm$. Пресметај ја должината на отсечката што ги поврзува средините на тежишните линии повлечени кон другите две страни на триаголникот.

Решение: Нека $\overline{BC} = 20\,cm$, M е средина на страната AC, а N е средина на страната AB. Да ги означиме со K и L средините на тежишните линии BM и CN соодветно. Ако F е средина на MC, тогаш LF е средна линија во триаголникот ΔNCM, а KF е средна линија во триаголникот ΔBCM. Следува $LF \parallel MN \parallel BC \parallel KF$ што значи дека точките K, L и F лежат на иста права. Следува



$$\overline{KL} = \overline{KF} - \overline{LF} = \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\overline{MN} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{BC} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{1}{4}\cdot 20\,cm = 5\,cm.$$

3655. На располагање се 83 бели летви со должина од $6\,m$, 72 жолти летви од $7\,m$, 62 зелени летви од $8\,m$ и 58 црвени летви со должина од $9\,m$. Дали може со дадените летви да се огради квадратен терен, така што сите летви се искористени и секоја страна на квадратот–ограда содржи точно две бои? Преклопување на летвите при оградувањето не е дозволено.

Решение: Ако бараниот квадрат постои, тогаш има периметар $L=83\cdot 6+72\cdot 7+62\cdot 8+58\cdot 9=498+504+496+522=2020\mathrm{m}$ и страната има должина $a=505\mathrm{m}$. Од равенствата:

$$83\cdot 6+1\cdot 7=505$$

$$62\cdot 8+1\cdot 9=505$$

$$67\cdot 7+4\cdot 9=505$$

$$53\cdot 9+4\cdot 7=505$$

е јасно дека бараното оградување на теренот е можно. Посочениот начин на комбинирање на летвите така што секоја страна е двобојна не е единствен. Ве охрабруваме да најдете ваш начин на оградување на теренот.

9 одделение

3656. Реши ја равенката

$$1-(2-(3-...(2018-(2019-(2020-x)))...))=1010 .$$

Решение.

Може да се забележи дека пред секој непарен број има непарен број на загради и минуси (пред 3 има 2 загради и 2 минуса, пред 5 има 4 загради и 4 минуса, ..., пред 2019 има 2018 загради и 2018 минуса), а пред секој парен број има парен број на загради и минуси (пред 2 има една заграда и еден минус, пред 4 има 3 загради и 3 минуса, ..., пред 2020 има 2019 загради и 2019 минуса). Пред x има 2019 загради и 2020 минуса па знакот пред x е плус. Ако се ослободиме од заградите добиваме дека пред парните броеви е знакот минус, а пред непарните броеви е знакот плус. Така имаме $1-2+3-4+...-2018+2019-2020+x=1010$.

Групирајќи ги во парови добиваме

$\left(1-2\right)+\left(3-4\right)+...+\left(2017-2018\right)+\left(2019-2020\right)+x=1010$, односно $\underbrace{-1-1-...-1-1}_{1010}+x=1010$. На тој начин добиваме дека $x=2020$.

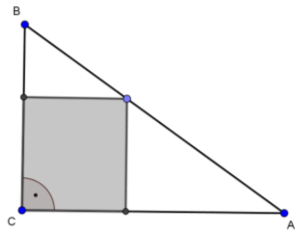
3657. За доручек во едно семејство мајката приготвила лонче со кафе и лонче со млеко. Целото млеко и кафе било испиено кога секој член од семејството испил по една чаша од 250 грама, мешајќи кафе и млеко по свој вкус. Таткото испил $\frac{1}{4}$ од млекото и $\frac{1}{6}$ од кафето. Колку члена има семејството?

Решение. Нека семејството има n члена. Тогаш $250n$ грама е вкупно испиената течност. Ако со x го означиме вкупното количеството на испиено млеко од сите членови заедно, тогаш $250n-x$ е вкупното количеството на испиено кафе од сите членови заедно. Бидејќи x и $250n-x$ се природни броеви, мора да биде исполнето дека $0<x<250n-x$. Од условот на задачата и фактот дека таткото испил 250 грама млеко со кафе, добиваме дека

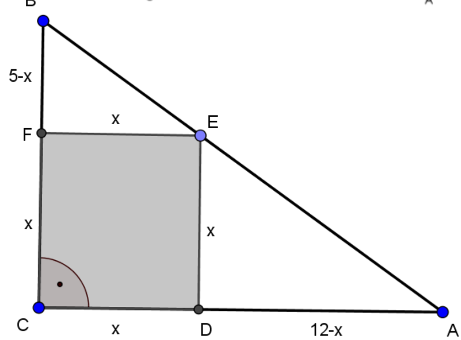
$$\frac{x}{4}+\frac{250n-x}{6}=250.$$

Оттука добиваме дека $n=6-\frac{x}{500}$. Бидејќи n е природен број, можните вредности на x се 500, 1000, 1500, 2000 и 2500. Ако $x=500$, тогаш $n=5$ и притоа $x<250n$. Ако x е друг број од наведените, тогаш се нарушува неравенството $x<250n$. Значи семејството има 5 члена.

3658. Пресметај ја плоштината на квадратот впишан во правоаголен триаголник со хипотенуза $13cm$ и катета $5cm$ (види цртеж).



Решение:



Без губење на општоста нека $\overline{BC}=5cm$. Од $\overline{AB}=13cm$ и $\overline{BC}=5cm$ со примена на Питагорова теорема имаме:

$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$, т.е. $13^2=\overline{AC}^2+5^2$, па $\overline{AC}^2=144$, од каде се добива дека $\overline{AC}=12\,cm$.

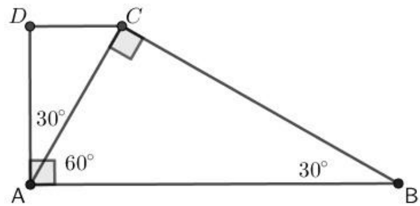
Нека $\overline{CF}=\overline{CD}=x$. Тогаш $\overline{BF}=5-x$ и $\overline{AD}=12-x$ (види цртеж). Од сличноста на триаголниците AED и EBF ја добиваме пропорцијата $(12-x):x=x:(5-x)$. На тој начин имаме: $(12-x)\cdot(5-x)=x^2$, од каде се добива дека $x=\frac{60}{17}$. Од формулата за плоштина на квадрат добиваме дека:

$$P=x^2=\frac{3600}{289}.$$

3659. Аглите при темињата A и B на трапезот $ABCD$ (притоа $AB\parallel CD$) се соодветно 90° и 30°. Аглите $\angle DAC$ и $\angle CAB$ се однесуваат како $1:2$. Докажи дека $\overline{AB}=4\cdot\overline{DC}$.

Решение: Од условот на задачата имаме дека

$\angle DAC:\angle CAB=1:2$ .....(1)



Нека $\angle DAC=x$, $0^\circ<x<180^\circ$. Тогаш од (1) следува дека $\angle CAB=2x$.

Бидејќи $\angle DAC+\angle CAB=90^\circ$, добиваме дека $x+2x=90^\circ$, т.е. $x=30^\circ$. Тогаш

$$\angle CAB=2\cdot30^\circ=60^\circ.$$

Од триаголникот ΔACB имаме дека

$$\angle ACB=180^\circ-\angle CAB-\angle CBA=180^\circ-60^\circ-30^\circ=90^\circ.$$

Бидејќи $AB\parallel CD$ и $\angle BAD=90^\circ$, следува дека $\angle ADC=90^\circ$. Катетата DC е спроти агол од 30° во правоаголниот триаголник ΔADC, па важи $\overline{AC}=2\cdot\overline{DC}$. Катетата AC е исто така спроти агол од 30° во правоаголниот триаголник ΔACB, па следува дека $\overline{AB}=2\cdot\overline{AC}=2\cdot2\cdot\overline{DC}=4\cdot\overline{DC}$, што требаше да се докаже.