1531. Реши го системот равенки во множеството на природни броеви.

$$\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=2-\left(y-z\right)^2 \\ y+\dfrac{1}{z}=2-\left(x-y\right)^2 \\ z+\dfrac{1}{x}=2-\left(z-x\right)^2 \end{cases}$$

Решение. Ако сите три равенки од системот ги собереме, добиваме

$$x+y+z+\left(\frac{1}{x}\right)+\left(\frac{1}{y}\right)+\left(\frac{1}{z}\right)=6-\left(x-y\right)^2-\left(y-z\right)^2-\left(z-x\right)^2 \quad (1)$$

Знаеме дека $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$ е точно за сите позитивни реални броеви a. Ако ова го примениме во (1) ќе приметиме дека левата страна на равенката е поголема или еднаква на 6 за сите x, y, z но десната страна на равенката е помала или еднаква на 6.

Во тој случај равенката (1) ќе биде задоволена акко двете страни се еднакви на 6. Тоа е можно само ако $x=y=z$. Ако сега замениме $x=y=z$ во равенката, тогаш за решенија на системот ќе ги добиеме $x=y=z=1$.

1532. Зоки му понудил на Јован да напише k различни двоцифрени броеви. Која е најмалата вредност на k за која Зоки секогаш може да избере два броја напишани од Јован така што нивната разлика да биде двоцифрен број запишан со исти цифри?

Решение. Ако разликата на два двоцифрени броја е број напишан со две исти цифри, тогаш оваа разлика ќе може да се подели со 11 без остаток. За да го сториме ова, врз основа на горенапишаното, во напишаните броеви од Јован треба да постојат два броја кои имаат еднаков остаток при делење со 11. Но, бидејќи постојат 11 различни остатоци при делење со 11, тогаш според принципот на Дирихле потребно е Јован да напише најмалку 12 различни броја.

1533. Реши ја равенката во множеството на реални броеви

$$\sqrt{\sin x-\sqrt{\sin x+\cos x}}=\cos x$$

Решение. Најпрвин приметуваме дека $\cos x\geq 0$ и $\sin x\geq\sqrt{\sin x+\cos x}$. Од друга страна знаеме дека $\sin x\leq\sqrt{\sin x}$ па $\sin x\leq\sqrt{\sin x+\cos x}$ заради позитивниот косинус. Тогаш равенката ќе биде возможна акко $\sin x = \sqrt{\sin x + \cos x}$. Од последново лесно се заклучува дека $\cos x = 0$ и $\sin x = 1$. Одговорот е $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, каде $k \in \mathrm{Z}$.

1534. Докажи дека $\sqrt{x^3-1} + \sqrt{y^3-1} = 0$ ако $\left(x\sqrt{x} + \sqrt{x^3-1}\right)\cdot\left(y\sqrt{y} + \sqrt{y^3-1}\right) = 1$

Решение. Ако ги помножиме двете страни на втората равенка со $x\sqrt{x} - \sqrt{x^3-1}$, добиваме

$$y\sqrt{y} + \sqrt{y^3-1} = x\sqrt{x} - \sqrt{x^3-1} \qquad (1)$$

Сега да ги помножиме двете страни со $y\sqrt{y} - \sqrt{y^3-1}$, добиваме

$$x\sqrt{x} + \sqrt{x^3-1} = y\sqrt{y} - \sqrt{y^3-1} \qquad (2)$$

Ако сега ги собереме (1) и (2), добиваме $2\left(\sqrt{x^3-1} + \sqrt{y^3-1}\right) = 0$

Од овде гледаме дека $\sqrt{x^3-1} + \sqrt{y^3-1} = 0$.

1535. Докажи дека еден од корените на равенката $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ е $-\frac{b}{3a}$ ако корените се членови на една аритметичка прогресија.

Решение. Од Виетови формули за кубна равенка имаме $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$.

Ако сите три корена на равенката формираат аритметичка прогресија, тогаш $x_1 + x_3 = 2x_2$

Ако ова го искористиме во сумата на корените на равенката добиваме $2x_2 + x_2 = -\frac{b}{a}$ и од тука $x_2 = -\frac{b}{3a}$ што требаше да докажеме.

1536. Одреди ги сите функции $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ за кои важи $f(4xy) = 2y\cdot\left[f(x+y) + f(x-y)\right]$, $\forall x, y \in \mathbf{R}$ и $f(2019) = 2020$.

Решение. Заменувајќи за $y = 0$ добиваме $f(0) = 0$, а за $x = 0$ добиваме $f(0) = 2y\cdot\left(f(y) + f(-y)\right)$ од каде следува $f(-y) = -f(y)$. На тој начин добиваме дека $f(x)$ е непарна функција. Од равенството $f(4ab) = f(4ba)$ имаме $2b\left[f(a+b) + f(a-b)\right] = 2a\left[f(b+a) + f(b-a)\right]$ односно
$b\cdot f(a+b) + b\cdot f(a-b) = a\cdot f(a+b) - a\cdot f(a-b)$.
Така добиваме $(a+b)\cdot f(a-b) = (a-b)\cdot f(a+b)$ ...(1).
Заменувајќи за $a - b = 2019$ одоносно за $b = a - 2019$ во равенството (1)
имаме $(2a-2019)\cdot f(2019) = 2019\cdot f(2a-2019)$ ...(2). Ако сега во равенството (2) ја користиме

замената $2a-2019=x$ добиваме $x\cdot f(2019)=2019\cdot f(x)$ ...(3). Заменувајќи во равенството (3) за $f(2019)=2020$ имаме $x\cdot 2020=2019\cdot f(x)$ односно $f(x)=\frac{2020}{2019}\cdot x$.

1537. Најди ги сите реални броеви $x,\ y,\ z$ за кои $x^2-4y+7=0$, $y^2-6z+14=0$ и $z^2-2x-7=0$.

Решение. Со собирање на трите равенки добиваме $x^2-4y+7+y^2-6z+14+z^2-2x-7=0$ односно $x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-6z+9=0$. На тој начин имаме $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0$. Следува дека $x-1=0,\ y-2=0,\ z-3=0$ односно $x=1,\ y=2,\ z=3$.

1538. Во множеството на реалните броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2\\ \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2\\ \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2\end{cases}.$$

Решение. Дадениот систем е еквивалентен со системот

$$\begin{cases}\log_2 x+\log_{2^2} y+\log_{2^2} z=2\\ \log_3 y+\log_{3^2} z+\log_{3^2} x=2\\ \log_4 z+\log_{4^2} x+\log_{4^2} y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x+\frac{1}{2}\log_2 y+\frac{1}{2}\log_2 z=2\\ \log_3 y+\frac{1}{2}\log_3 z+\frac{1}{2}\log_3 x=2\\ \log_4 z+\frac{1}{2}\log_4 x+\frac{1}{2}\log_4 y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x+\log_2\sqrt{y}+\log_2\sqrt{z}=2\\ \log_3 y+\log_3\sqrt{z}+\log_3\sqrt{x}=2\\ \log_4 z+\log_4\sqrt{x}+\log_4\sqrt{y}=2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\log_2 x\sqrt{y}\sqrt{z}=2\\ \log_3 y\sqrt{z}\sqrt{x}=2\\ \log_4 z\sqrt{x}\sqrt{y}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\sqrt{y}\sqrt{z}=4\\ y\sqrt{z}\sqrt{x}=9\\ z\sqrt{x}\sqrt{y}=16\end{cases}$$

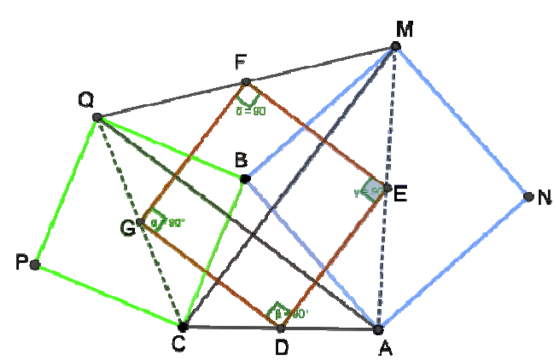
.Со множење на трите равенства од последниот систем добиваме $x^2y^2z^2=4\cdot 9\cdot 16$ односно $(xyz)^2=(2\cdot 3\cdot 4)^2$. Бидејќи $xyz>0$ добиваме дека $xyz=24$ ...(1).

На тој начин имаме дека $\frac{xyz}{x\sqrt{y}\sqrt{z}}=\frac{x\sqrt{y}^2\sqrt{z}^2}{x\sqrt{y}\sqrt{z}}=\sqrt{y}\sqrt{z}=\frac{24}{4}=6$.Значи добиваме дека $yz=36$ ...(2).

Со делење на равенствата (1) и (2) добиваме $x=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$. Аналогно се добива $xz=\frac{64}{9}$, $xy=\frac{9}{4}$ од каде следува $y=\frac{27}{8}$, $z=\frac{32}{3}$. Така имаме дека $(x,y,z)=\left(\frac{2}{3},\frac{27}{8},\frac{32}{3}\right)$.

1539. На страните AB и BC на ΔABC надворешно се конструирани квадратите $ABMN$ и $BCPQ$. Докажи дека центрите на тие квадрати и средините на отсечките MQ и AC образуваат квадрат.

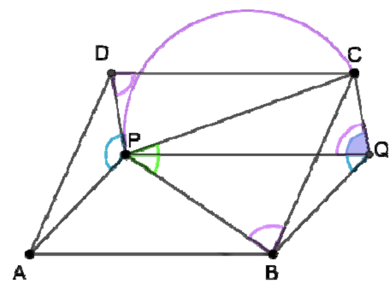
Решение. Користејќи го признакот за складност САС добиваме складност на триаголниците ABQ и MBC. На тој начин имаме дека $\overline{AQ}=\overline{CM}$. Од тоа што отсечките $\overline{GD}$ и $\overline{FE}$ е средни линии во триаголниците AQC и AMQ, соодветно имаме



дека $\overline{GD}=\frac{1}{2}\overline{AQ}=\overline{FE}$ и $GD \parallel AQ \parallel FE$ ...(1). Аналогно добиваме дека $\overline{DE}=\frac{1}{2}\overline{CM}=\overline{GF}$ и $DE \parallel CM \parallel GF$ ...(2). Значи, четириаголникот $DEFG$ е квадрат или ромб. Користејќи ротација со центар во точката B и агол од 90° добиваме дека триаголникот QAB ќе се преслика во триаголникот CMB. Така имаме дека $AQ \perp CM$ ...(3). Од релациите (1), (2) и (3) добиваме дека четириаголникот $DEFG$ е квадрат.

1540. Во внатрешноста на паралелограмот $ABCD$ избрана е точка P таква што $\angle DPA+\angle BPC=180^{\circ}$ Докажи дека $\angle PDC=\angle CBP$.

Решение. Ја конструираме отсечката $\overline{BQ}$ еднаква и паралелна со $\overline{AP}$. На тој начин имаме дека $\angle QBC=\angle PAD$ како агли со земно паралелни краци. Така добивме дека триаголниците BQC и APD се складни. Значи, $\angle BQC=\angle APD$. Од условот $\angle DPA+\angle BPC=180^{\circ}$ следува дека четириаголникот $BQCP$ е тетивен. Така имаме дека $\angle CBP=\angle CQP$ ...(1).



Од тоа што четириаголникот $PQCD$ е паралелограм имаме $\angle PDC=\angle CQP$ ...(2).
Од (1) и (2) следува бараното равенство.

1541. Во сенатот има 30 сенатори. Секој од сенаторите се скарал со точно шест други сенатори. На колку начини може да биде формирана трочлена комисија од сенатори така да било кои два члена од комисијата се скарани или пак било кои два члена од комисијата не се скарани?

Решение. Нека x е бројот на трочлените комисии за кои важат уловите од задачата. Таквите комисии понатаму ќе ги нарекуваме добри. Со y да го означиме бројот на трочлените комисии за кои условите на задачата не се исполнети. Тогаш $x+y=\binom{30}{3}=4060$. Да претпоставиме дека секој сенатор прави список на сите комисии во кои тој е член, но така да секој од останатите два члена на комисијата е скаран со него или не е скаран со него. Секој таков список содржи $\binom{23}{2}+\binom{6}{2}=268$ комисии. При тоа, секоја добра комисија ќе биде запишана точно во три списоци, а секоја комисија која не е добра ќе биде запишана само во еден од тие списоци. Затоа $3x+y=30\cdot 268=8040$. На тој начин добиваме систем равенки $x+y=4060$ и $3x+y=8040$ од каде следува дека $x=1990$.

1542. Низата (a_n) има прв член $a_1=1$ и е дефинирана со $a_n=a_{n-1}+\sqrt{a_{n-1}^{\ 2}+1}$ за секое $n\geq 2$.

Докажи дека низата $b_n=\frac{a_n}{2^n}$ е конвергентна низа.

Решение. Од $a_1 = 1$ следува дека $b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{1}{2}$. Бидејќи $a_n - a_{n-1} = \sqrt{a_{n-1}^{\ 2} + 1} > 0$ за секое $n \geq 2$, следува дека низата a_n е строго монотоно растечка со позитивни членови ($a_1 = 1$), па да ја пресметаме разликата

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + \sqrt{a_n^{\ 2} + 1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{\sqrt{a_n^{\ 2} + 1} - a_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}\left(\sqrt{a_n^{\ 2} + 1} + a_n\right)} > 0, \qquad n \in N$$

$\Rightarrow b_{n+1} > b_n$

И за низата b_n добиваме дека е строго монотоно растечка. Од друга страна пак имаме

$$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n + \sqrt{a_n^{\ 2} + 1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{\sqrt{a_n^{\ 2} + 1} - a_n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}\left(\sqrt{a_n^{\ 2} + 1} + a_n\right)} < \frac{1}{2^{n+1}} \quad (*)$$

бидејќи изразот $\sqrt{a_n^{\ 2} + 1} + a_n$ е секогаш поголем од 1. Да го напишеме општиот член на низата b_n на следниов начин: $b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n-1})$ па користејќи (*) следува дека

$$b_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1$$

како сума на бескраен геометриски ред. Значи, $b_n < 1$ па низата b_n е ограничена од горе. Бидејќи b_n е монотоно растечка и ограничена од горе, заклучуваме дека низата b_n е конвергентна низа.

1543. Ако еден петоцифрен број се подели со 10 се добива остаток 3. Ако се подели со 15 се добива остаток 8, а ако се подели со 84 се добива остаток 5. Кој е најмалиот петоцифрен број?

Решение. Задачава ќе ја решиме со помош на систем равенки. Нека бараниот број го означиме со x. Од условите на задачата го добиваме следниов систем равенки:

$$\begin{cases} x = 10a + 3 \\ x = 15b + 8 \\ x = 84c + 5 \end{cases} \qquad a, b, c \in N$$

Приметуваме дека имаме три равенки, а четири променливи. Ако ги изедначиме првата со втората и првата со третата равенка, ќе успееме да ја елиминираме променливата x и ќе го добиеме следниов систем равенки:

$$\begin{cases} 10a + 3 = 15b + 8 \\ 10a + 3 = 84c + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10a - 15b = 5 \\ 10a - 84c = 2 \end{cases}$$

и ако последниве две равенки ги одземеме ќе добиеме

$$15b - 84c = -3 \Leftrightarrow 5b - 28c = -1 \Leftrightarrow b = \frac{28c - 1}{5} = 5c + \frac{3c - 1}{5}$$

Бидејќи b и $5c$ се цели броеви, тогаш и дропката $\frac{3c-1}{5}$ мора да биде цел број. Значи,

$$\frac{3c-1}{5}=m\in Z \Leftrightarrow 3c-5m=1 \Leftrightarrow c=\frac{5m+1}{3}=m+\frac{2m+1}{3}$$
$$\frac{2m+1}{3}=l\in Z \Leftrightarrow 2m+1=3l \Leftrightarrow m=\frac{3l-1}{2}=l+\frac{l-1}{2}$$

за да $\frac{l-1}{2}$ е цел број, l мора да биде непарен цел број т.е. $l=2k+1, \quad k\in Z$ Ако сега овие променливи почнеме да ги заменуваме наназад ќе добиеме:

$$m=l+\frac{l-1}{2}=2k+1+\frac{2k}{2}=3k+1$$
$$c=m+\frac{2m+1}{3}=3k+1+\frac{2(3k+1)+1}{3}=5k+2$$
$$b=5c+\frac{3c-1}{5}=5(5k+2)+\frac{3(5k+2)-1}{5}=28k+11$$

Така $x=15b+8=15(28k+11)+8=420k+173$. Најмалиот петцифрен број е 10000.

$420k+173=10000 \Leftrightarrow k=\frac{9827}{420}\approx 23{,}3.$ Последново кажува дека за $k=24$ го добиваме најмалиот петцифрен број $x=420\cdot 24+173=10253$ кој ги исполнува условите од задачата.

Втор начин за решавање на овој проблем кој е многу побрз и поефикасен од горниот е со помош на Кинеската теорема за остатоци.

1544. Докажи дека равенката $x^2+y^3=z^4$ нема решение во множеството на простите природни броеви, а во множеството на целите броеви има бесконечно многу решенија. Наведи две од решенијата.

Решение. а) Прво да докажеме дека равенката нема решение во множеството на прости броеви. Ќе разгледаме два случаи: $z=2$ и $z>2$.

Ако $z=2$, тогаш $z^4=16=x^2+y^3$. Јасно е дека $y^3<16$, па $y<3$, значи $y=2$. Тогаш $x^2=8$, па равенката нема решенија.

Ако $z>2$, тогаш z е непарен, па и z^4 е непарен број. Ова значи дека на левата страна на равенката едниот од броевите мора да е парен, а другиот непарен.

Ако $x=2$, равенката станува $4+y^3=z^4 \Leftrightarrow (z^2+2)(z^2-2)=y^3$. Можни се два случуја: $z^2+2=y^3$ и $z^2-2=1$ или $z^2+2=y^2$ и $z^2-2=y$. Од првиот систем равенки се добива $y^3=5$, а од другиот $y^2-y=4$ па и во овој случај равенката нема решение во множеството на прости броеви.

Ако $y=2$, тогаш $x^2+8=z^4$, т.е. $(z^2+x)(z^2-x)=8$ па $z^2+x=4$ и $z^2-x=2$. Бидејќи решението на добиениот систем е $z^2=3$ и $x=1$, заклучуваме дека равенката нема решенија во множеството на прости броеви.

б) Дадената равенка е еквивалентна со $y^3 = z^4 - x^2 = (z^2 + x)(z^2 - x)$, па една од можностите е $z^2 + x = y^2$ и $z^2 - x = y$. Решавајќи го овој систем добиваме $x = \frac{y(y-1)}{2}$ и $8z^2 = 4y^2 + 4y$ од каде излегува дека $8z^2 + 1 = (2y+1)^2$. Ако воведеме смена $a = 2y+1$ и $b = 2z$, се добива равенката $a^2 - 2b^2 = 1$ која спаѓа во групата Пелова равенка ($x^2 - py^2 = 1$ каде p е природен број кој не е квадрат на ниеден цел број, а x, y се цели броеви). Основното (почетно) решение на оваа равенка кое го добиваме лесно со проба е $(a_e, b_e) = (3,2)$. Останатите решенија ги добиваме преку рекурентните врски $a_{n+1} = a_e a_n + p b_e b_n$ и $b_{n+1} = b_e a_n + a_e b_n$ па добиваме дека $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ и $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ кои со директна проверка (пробај за самостојна работа) забележуваме дека ја задоволуваат дадената равенка. За добивање на секое наредно решение земаме $n = 1,2,3.......$ и $(a_0, b_0) = (1,0)$ кое претставува тривијално решение на Пеловата равенка. Бидејќи оваа равенка во множеството на целите броеви има бесконечно многу решенија, така и дадената равенка има бесконечно многу решенија во Z. На пример некои од решенијата се: $(0,1,1); (28,8,6); (1176,49,35)......$

1545. Докажи дека за било кои три ненулти реални броеви е точно следново неравенство:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{42}{5} \ge \frac{19}{5}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)$$

Во кој случај важи равенството?

Решение. Веднаш забележуваме дека даденото неравенство е хомогено. Ако употребиме замена $\left\{ x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a} \right.$ следува дека $xyz = 1$, па даденото неравенство преминува во следниот облик:

$5(x^2 + y^2 + z^2) + 42 \ge 19(x + y + z)$. Бидејќи x, y, z се ненулти реални броеви и ако ги замениме со $|x|, |y|, |z|$, левата страна од неравенството останува непроменета, а десната страна е непроменета или растечка. Затоа е доволно да го докажеме неравенството за $x, y, z > 0$.

Сега да го запишеме даденото неравенство во облик $5(x^2 + y^2 + z^2) + 42 - 19(x + y + z) \ge 0$ и да ја означиме левата страна со $F(x, y, z)$. Треба да покажеме дека $F(x, y, z) \ge 0$. Нека $x = \min\{x, y, z\}$. Тогаш $xyz = 1 \ge x \cdot x \cdot x$, па $x \le 1$ и $yz \ge 1$ (*)

Ќе докажеме дека $F(x, y, z) - F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) \ge 0$.

$F(x, y, z) = 5(x^2 + y^2 + z^2) + 42 - 19(x + y + z)$

$F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) = 5(x^2 + 2yz) + 42 - 19(x + 2\sqrt{yz})$

$F(x, y, z) - F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) = 5(y - z)^2 - 19(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 = (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 \cdot \left(5(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 - 19\right) \ge 0$ бидејќи $\sqrt{y} + \sqrt{z} \ge 2\sqrt[4]{yz} \overset{(*)}{\ge} 2$. Така заклучивме дека $F(x, y, z) \ge F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz})$. Во последниов израз забележуваме дека 2 променливи се еднакви и сите три променливи го исполнуваат условот нивниот производ да е 1, т.е. $x \cdot \sqrt{yz} \cdot \sqrt{yz} = xyz = 1$, па од тие причини, ако ставиме замена $x = t^2$ каде $t \in \Re^+$, ќе добиеме дека двете еднакви променливи се $\frac{1}{t}$. Конечно, ако продолжиме со замената ќе добиеме:

$$F(x, y, z) \geq F(x, \sqrt{yz}, \sqrt{yz}) = F\left(t^2, \frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right) = 5\left(t^2 + \frac{2}{t^2}\right) + 42 - 19\left(t^2 + \frac{2}{t}\right) = \frac{2(1-t)(7t^3 + 7t^2 - 14t + 5)}{t^2} \geq 0$$

Последново е точно, бидејќи $1 \geq x = t^2 > 0$, т.е. $0 < t \leq 1$ и $7t^3 + 7t^2 - 14t + 5 > 0$.

Со тоа доказот е завршен. Неравенството станува равенство за $t = 1$. Тогаш $x = y = z = 1$ т.е. $a = b = c$.