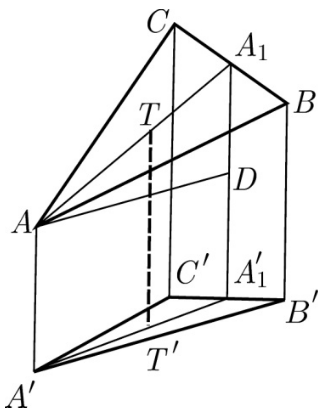
РЕШЕНИЈА
ЗАДАЧИ ОД УЧИЛНИЦАТА СИГМА 115

Прва година

1. Ортогоналната проекција на рамностраниот триаголник ΔABC врз некоја рамнина е триаголникот $\Delta A'B'C'$. Ако $\overline{AA'}=10$ cm, $\overline{BB'}=15$ cm и $\overline{CC'}=17$ cm, одреди го растојанието $\overline{TT'}$ од тежиштето на триаголникот ΔABC до рамнината.

Решение. Нека $\overline{AA_1}$ и $\overline{A'A_1'}$ се тежишни линии во ΔABC и $\Delta A'B'C'$ соодветно. Четириаголникот $CC'B'B$ е трапез, па $\overline{A_1A_1'}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overline{CC'}+\overline{BB'}\right)=16$ cm, како средна лиинија во трапезот. Нека $AD \parallel A'A_1'$. Тогаш $\overline{ET'}=\overline{DA_1'}=\overline{AA'}=10$ cm, каде што $\{E\}=AD\cap TT'$. Оттука $\overline{A_1D}=6$ cm. Од сличноста на ΔADA_1 и ΔAET имаме дека $\overline{TE}:\overline{A_1D}=\overline{AT}:\overline{AA_1}$, т.е. $\overline{TE}:6=2:3$, а оттука $\overline{TE}=4$ cm (бидејќи T е тежиште во триаголникот важи $\overline{AT}:\overline{AA_1}=2:3$). Конечно, $\overline{TT'}=\overline{ET'}+\overline{TE}=10+4=14$ cm.



2. Дали постои цел број x таков што броевите $\frac{14x+5}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}$ се истовремено цели броеви?

Решение. Дадените броеви може да ги запишеме како $\frac{14x+5}{9}=\frac{9x+5x+5}{9}=x+\frac{5(x+1)}{9}$ и $\frac{17x-5}{12}=\frac{12x+5x-5}{12}=x+\frac{5(x-1)}{12}$. Ова значи дека првиот број е цел ако $5(x+1)$ е содржател на 9 односно $x+1$ е содржател на 9 т.е. $x+1=9k$, $k\in\mathbb{Z}$. Аналогно, вториот број е цел ако $x-1$ е содржател на 12 т.е. $x-1=12m$, $m\in\mathbb{Z}$. Броевите треба да се истовремено цели па според тоа мора $9k-1=12m+1 \Leftrightarrow 9k-12m=2 \Leftrightarrow 3(3k-4m)=2$.

Ова значи дека ако ставиме $3k-4m=n\in\mathbb{Z}$, тогаш треба $3n=2$, за некој цел број n што не е можно.

3. Докажи дека за секои реални броеви x и y важи неравенството $x^2+5y^2+1\ge 4xy+2y$.

Решение. Неравенството е еквивалентно со неравенството $x^2+5y^2+1-4xy-2y\ge 0$. Ќе извршиме прегрупирање на собироците на следниот начин

$$x^2+5y^2+1-4xy-2y=x^2-4xy+4y^2+y^2-2y+1=(x-2y)^2+(y-1)^2.$$

Секој од добиените собироци е полн квадрат и затоа е поголем или еднаков на нула за секои $x,y\in\mathbb{R}$. Односно, важи $x^2+5y^2+1-4xy-2y\ge 0$, а со тоа важи и почетното неравенство.

4. Пресметај ја разликата на изразите $1^2+2^2+3^2+...+2020^2$ и $1\cdot 3+2\cdot 4+...+2019\cdot 2021$.
Решение. Ќе го трансформираме вториот израз на следниот начин:

$$1\cdot 3+2\cdot 4+...+2019\cdot 2021=(2-1)\cdot(2+1)+(3-1)\cdot(3+1)+...(2020-1)\cdot(2020+1)=$$
$$=2^2-1+3^2-1+...+2020^2-1=1^2+2^2+...+2020^2-2020$$

Јасно, сега разликата на двата изрази е точно 2020.

Втора година

1. Ако коефициентите на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ се цели броеви, тогаш и нејзините корени се цели броеви. Докажи.

Решение. Тврдењето не е точно што може да се види на следниот контрапример: Ако $p=0$ и $q=-2$, решенијата на равенката $x^2-2=0$ има целобројни коефициенти, но решенијата не се цели броеви.

Забелешка. Во текстот на задачата објавена во Сигма 115, испуштена е претпоставката дека дискриминантата на равенката е полн квадрат. Се извинуваме за направениот пропуст. Во продолжение е корегираниот текст заедно со решението.

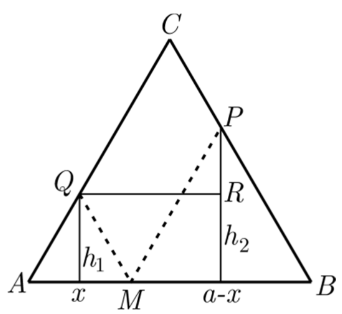
1. Ако коефициентите на квадратната равенка $x^2+px+q=0$ се цели броеви за кои p^2-4q е точен квадрат, тогаш и нејзините корени се цели броеви. Докажи.

Решение. Бидејќи p^2-4q е точен квадрат и коефициентите на равенката се цели броеви, следува дека решенијата на равенката се рационални броеви. Да претпоставуваме дека корените на дадената равенка се рационални, но не цели броеви, односно броеви од облик $\frac{a}{b}$, каде што НЗД$(a,b)=1$ и $b\neq 0,1$. Бидејќи $\frac{a}{b}$ е корен на равенката, имаме дека $\left(\frac{a}{b}\right)^2+p\cdot\frac{a}{b}+q=0$ и, бидејќи $b\neq 0$, $b\cdot\frac{a^2}{b^2}+p\cdot a+q\cdot b=0$, односно $\frac{a^2}{b}=-(p\cdot a+q\cdot b)$.

Поради НЗД$(a,b)=1$, дропките $\frac{a}{b}$ и $\frac{a^2}{b}$ се нескратливи дропки. Но, од друга страна $-(p\cdot a+q\cdot b)$ е цел број, па добиваме противречност. Бидејќи направената претпоставка води до противречност, следува дека корените на дадената равенка се цели броеви, што требаше да се докаже.

2. На страната AB на рамностраниот триаголник ΔABC избрана е точка M. Низ точката M повлечени се прави паралелни со страните BC и AC и така се добиени точките $P\in BC$ и $Q\in AC$. Одреди ја положбата на точката M, така што отсечката PQ да биде со најмала должина.

Решение. Нека a е должина на страната на рамностраниот триаголник ΔABC. Нека $\overline{AM}=x$. Тогаш $\overline{MB}=a-x$. Триаголниците ΔQAM и ΔPMB се рамнострани со висини $h_1=\frac{x\sqrt{3}}{2}$ и $h_2=\frac{(a-x)\sqrt{3}}{2}$ соодветно. Нека точката R е подножје на нормалата спуштена од точката Q кон висината h_2. Значи, триаголникот ΔQRP е правоаголен. Тогаш



$\overline{QR} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(a-x) = \frac{a}{2}$ и $\overline{RP} = h_2 - h_1 = \frac{(a-x)\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}$.

Од правоаголниот триаголник ΔQRP, според Питагоровата теорема, се добива дека

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{QR}^2 + \overline{RP}^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{3x^2 - 3ax + a^2} .$$

Отсечката $\overline{PQ}$ ќе биде со најмала должина за онаа вредност на x за која квадратната функција $f(x) = 3x^2 - 3ax + a^2$ достигнува минимум, односно за $x = -\frac{-3a}{2\cdot 3} = \frac{a}{2}$. Значи $\overline{AM} = \frac{a}{2}$, па отсечката $\overline{PQ}$ ќе биде со најмала должина кога точката M ќе биде средишна точка на страната AB .

3. Нека за квадратниот трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ важи $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = 0$ или $f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right) = 0$. Докажи дека $f(1)\cdot f(-1) = 0$.

Решение.

$$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = \frac{a(a-b-c)^2}{4a^2} + \frac{b(a-b-c)}{2a} + c = \frac{(a-b-c)^2 + 2b(a-b-c) + 4ac}{4a} =$$
$$= \frac{(a-b-c)(a-b-c+2b) + 4ac}{4a} = \frac{(a-b-c)(a+b-c) + 4ac}{4a} =$$
$$= \frac{(a-b)(a+b) - c(a-b) - c(a+b) + c^2 + 4ac}{4a} = \frac{a^2 - b^2 - 2ac + c^2 + 4ac}{4a} =$$
$$= \frac{(a+c)^2 - b^2}{4a} = \frac{(a+c-b)(a+c+b)}{4a} = \frac{f(-1)\cdot f(1)}{4a} = 0.$$

4. Корените на квадратната равенка $x^2 + ax + b + 1 = 0$ се природни броеви. Докажи дека $a^2 + b^2$ е сложен број.

Решение. Користејќи ги Виетовите правила имаме $x_1 + x_2 = -a,\ x_1x_2 = b+1$. Тогаш $a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2 - 1)^2 = x_1^2 + x_2^2 + (x_1x_2)^2 + 1 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$. Јасно, корените се природни, па $x_1^2 + 1, x_2^2 + 1 \geq 2$ од каде $a^2 + b^2$ е сложен број.

Трета година

1. Нека $a < b < c$, $a + c = 2b$ и $\frac{r}{R} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$, каде $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}$ и $c = \overline{AB}$ се должините на страните, а r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружница на ΔABC. Одреди ја големината на аголот во темето B .

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{b}{\sin\beta}=2R$ т.е. $b=2R\sin\beta$. Плоштината на ΔABC е $P=sr=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=\frac{abc}{4R}$, од каде со замена на условот $a+c=2b$ се добива: $\frac{3b}{2}\cdot r=\frac{abc}{4R}\Leftrightarrow 6rR=ac$. Од косинусната теорема имаме

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta=(a+c)^2-2ac-2ac\cos\beta=(a+c)^2-2ac(1+\cos\beta)=$$
$$=(2b)^2-2\cdot 6rR(1+\cos\beta)$$
$$12rR(1+\cos\beta)=3b^2\Leftrightarrow 4rR(1+\cos\beta)=4R^2\sin^2\beta\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r(1+\cos\beta)=R(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)$$

Ако последното равенство го скратиме со $1+\cos\beta$, бидејќи $\beta\neq 180^0$ ќе добиеме дека $r=R(1-\cos\beta)$. Од условот на задачата имаме дека $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=1-\cos\beta$ од каде следува дека $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ т.е. $\beta=30^0$.

2. Да се пресмета $\sin^2 2\alpha$ ако важи $\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}=7.$

Решение.

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}+\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}=7\ \Leftrightarrow\ \frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}+\frac{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=7\ \Leftrightarrow$$
$$1+\cos^4\alpha+\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=7\sin^2\alpha\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\ \Leftrightarrow$$
$$1+(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)^2=9\sin^2\alpha\cos^2\alpha\ \Rightarrow\ \sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{2}{9}\Leftrightarrow$$
$$4\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\frac{8}{9}\Leftrightarrow\ \sin^2 2\alpha=\frac{8}{9}.$$

3. Реши ја тригонометриската равенка $\sin x+\cos x+\sin x\cos x=1$.

Решение. Ќе се повикаме на равенството $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$, па воведувајќи смена $\sin x+\cos x=t$, равенката добива облик $t+\frac{t^2-1}{2}=1\Leftrightarrow t^2+2t-3=0$ чии решенија се $t_1=-3\wedge t_2=1$. Заради $-1\le\sin x,\cos x\le 1$, вредноста на t е ограничена, $-2\le t\le 2$, па првото решение по t отпаѓа. Останува да се реши равенката $\sin x+\cos x=1$. Истовремено, заради првото равенство, $\sin x\cos x=0$, па користејќи Виетови правила, $\sin x$ и $\cos x$ се решенија на квадратната равенка $y^2-y=0$, односно постојат две можности $y=0\vee y=1$. Тогаш решенијата се $\sin x=0\ (\Leftrightarrow\cos x=1)$ и $\sin x=1(\Leftrightarrow\cos x=0)$. Решенијата по x се $x=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$ и $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

4. Реши ја равенката $6\log_{27}(-\sin 4x)-2\log_3(2\sin^2 2x-1)=1$, на интервалот $[0,2\pi)$.

Решение. Од $2\sin^2 2x-1=2\sin^2 2x-(\sin^2 2x+\cos^2 2x)=\sin^2 2x-\cos^2 2x=-\cos 4x$ и од $\log_{27} y=\frac{1}{\log_y 3^3}=\frac{1}{3}\log_3 y$, добиваме трансформиран облик на равенката

$2\log_3(-\sin 4x)-2\log_3(-\cos 4x)=1$, односно $\log_3(tg4x)=\frac{1}{2}$, при услови $\sin 4x,\cos 4x<0$ .... (1). Сега јасно, $tg4x=\sqrt{3}$, односно $4x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, за k цел број. За да е задоволен условот (1), мора $4x=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$, односно $x=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$, за k цел број. Во дадениот интервал $[0,2\pi)$ имаме само четири решенија и тоа $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right\}$.

Четврта година

1. Докажи дека

$$1+x+x^2+.....+x^{80}=(x^{54}+x^{27}+1)(x^{18}+x^9+1)(x^6+x^3+1)(x^2+x+1).$$

Решение. Нека $S=1+x+x^2+.....+x^{80}$. Тогаш

$$S-xS=(1+x+x^2+.....+x^{80})-(x+x^2+x^3+.....+x^{81}),$$

$$S(1-x)=1-x^{81}, \text{ т.е. } S=\frac{x^{81}-1}{x-1}.$$

Значи $1+x+x^2+.....+x^{80}=\frac{x^{81}-1}{x-1}$. Но, $\frac{x^{81}-1}{x-1}=\frac{x^{81}-1}{x^{27}-1}\cdot\frac{x^{27}-1}{x^9-1}\cdot\frac{x^9-1}{x^3-1}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}$,

па затоа $1+x+x^2+.....+x^{80}=\frac{x^{81}-1}{x^{27}-1}\cdot\frac{x^{27}-1}{x^9-1}\cdot\frac{x^9-1}{x^3-1}\cdot\frac{x^3-1}{x-1}$. Имајќи ја во предвид формулата $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ имаме дека

$$\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}=x^2+x+1,$$

$$\frac{x^9-1}{x^3-1}=\frac{(x^3)^3-1}{x^3-1}=\frac{(x^3-1)(x^6+x^3+1)}{x^3-1}=x^6+x^3+1,$$

$$\frac{x^{27}-1}{x^9-1}=\frac{(x^9)^3-1}{x^9-1}=\frac{(x^9-1)(x^{18}+x^9+1)}{x^9-1}=x^{18}+x^9+1 \text{ и}$$

$$\frac{x^{81}-1}{x^{27}-1}=\frac{(x^{27})^3-1}{x^{27}-1}=\frac{(x^{27}-1)(x^{54}+x^{27}+1)}{x^{27}-1}=x^{54}+x^{27}+1.$$

Следува дека

$$1+x+x^2+.....+x^{80}=(x^{54}+x^{27}+1)(x^{18}+x^9+1)(x^6+x^3+1)(x^2+x+1),$$

што требаше да се докаже.

2. Ако решенијата на равенката $ax^3+bx^2+cx+d=0$ образуваат аритметичка прогресија, тогаш едно од решенијата на таа равенка е $-\frac{b}{3a}$.

Решение. Од Виетовите формули следува дека $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$, каде x_1, x_2 и x_3 се решенија на равенката. Од условот на задачата $x_1+x_3=2x_2$ и со замена во претходното равенство имаме $3x_2=-\frac{b}{a}$ т.е. $x_2=-\frac{b}{3a}$.

3. Докажи дека $\frac{1}{2021}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}<\sqrt{\frac{1}{2021}}$.

Решение. Ќе го разгледаме бројот $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}$. Важат следниве две неравенства за природен број n,

$$n(n+2)>n(n+1) \Leftrightarrow \frac{n}{n+1}>\frac{n}{n+2}$$

и $$n^2-1<n^2 \Leftrightarrow (n-1)(n+1)<n^2 \Leftrightarrow \frac{n-1}{n}<\frac{n}{n+1}.$$

Множејќи ги неравенствата за $n\in\{1,2,\ldots,2019\}$ добиени од првото неравенство, имаме $A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}>\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2021}=\frac{1}{2021}$, што е точно левата страна на неравенството во условот на задачата. За $n\in\{2,\ldots,2020\}$ користејќи го второто неравенство се добива

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2019}{2020}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{2020}{2021}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2020}{2019}\cdot\frac{1}{2021}=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2021}.$$

Добивме $A^2<\frac{1}{2021} \Leftrightarrow A<\sqrt{\frac{1}{2021}}$.

4. Најди ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ за кои важи $f(1)=1$ и $f(x+y)=3y\cdot f(x)+2x\cdot f(y)$ за било кои реални броеви x и y.

Решение 1. Ако во даденото равенство ставиме $x=y=0$, добиваме $f(0)=0$. Ако пак, замениме $x=1, y=0$, добиваме $f(1)=0$. Бидејќи f е функција, не е можно истовремено да важи $f(1)=1$ и $f(1)=0$. Оттука, јасно, функција со бараните својства не постои.

Решение 2. Заменувајќи еднаш $x=1$, а потоа и $y=1$, во вториот услов, добиваме $f(1+y)=3yf(1)+2f(y)=3y+2f(y)$ за произволно $y\in\mathbb{R}$ и $f(x+1)=3f(x)+2x$ за произволно $x\in\mathbb{R}$. Преименувајќи ја променливата во првото равенство од y во x, имаме $f(1+x)=3x+2f(x)$. Одземајќи ги двете равенства за $f(x+1)$, добиваме $3f(x)+2x-(3x+2f(x))=0$, од каде $f(x)=x$. Со проверка на вториот услов, имаме $f(x+y)=x+y\neq 5xy=3y\cdot f(x)+2x\cdot f(y)$. Значи, таква функција не постои.

Воедно им се извинуваме на читателите на Сигма заради настанати технички пропусти во Сигма 114 и ги објавуваме следните исправки во текстовите на задачите од Рубриката Задачи од училницата од Сигма 114.

Сигма 114, трета година – задача 1 треба да гласи:

1. Ако $S = \mathrm{Im}(1+i)^{2019}$, пресметај $\log_2 S$.

Сигма 114, четврта година – задача 4 треба да гласи:

4. Ако корените на равенката $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ образуваат геометриска прогресија, докажи дека $q^3 = p^3 r$.

Објавените решенија на овие две задачи во Сигма 115 се во ред.