ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020
25.01.2020 год.

Четврта година

1АБ. (Сигма 114, стр. 30, зад. 2) За која вредност на x, низата $\sqrt{x-5}$, $\sqrt[4]{10x+4}$, $\sqrt{x+2}$ е геометриска прогресија?

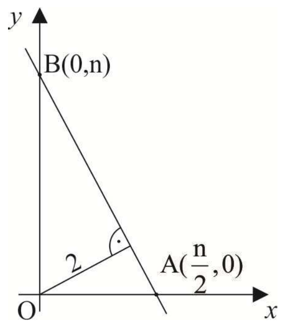
Решение. За да бидат дефинирани броевите, јасно е дека мора $x \geq 5$ (**5**). Членовите на низата формираат геометриска прогресија ако и само ако $\left(\sqrt[4]{10x+4}\right)^2 = \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{x+2}$ (**10**). Со квадрирање добиваме $10x+4 = x^2-3x-10$. После средувањето добиваме равенка $x^2-13x-14=0$, чии решенија се $x_1 = 14$ и $x_2 = -1$. Заради ограничувањето за x, бараната вредност за x е 14 (**10**).

2А. Нека $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е функција зададена со $f(x) = ax^5+bx^3+c\sin x-1$, каде a,b,c се реални броеви. Ако $f(-2019) = 2019$, одреди ја вредноста $f(2019)$.

Решение. Функциите $x^5, x^3, \sin x$ се непарни функции, па за функцијата во 2019 и -2019 важи: $f(-2019) = -2019^5 a - 2019^3 b - c\sin 2019 - 1$, $f(2019) = 2019^5 a + 2019^3 b + c\sin 2019 - 1$ (**15**). Го пресметуваме збирот $f(2019)+f(-2019) = -2$, од каде $f(2019) = -2 - f(-2019) = -2-2019 = -2021$ (**10**).

2Б. Права со коефициент на правец -2 е оддалечена за 2 cm од координатниот почеток. Пресметај ја плоштината на триаголникот формиран од дадената права и координатните оски.

Решение 1. Од условите на задачата дадената права има равенка $y = -2x+n$ (**5**). Нека A и B се пресечните точки на дадената права со x и y- оската, соодветно. Ако замениме $y=0$ и $x=0$ во правата, соодветно, ги добиваме пресечните точки $A\left(\frac{n}{2}, 0\right)$ и $B(0,n)$ (**5**). Триаголникот формиран од дадената права и координатните оски е AOB, каде $O(0,0)$ е координатниот почеток. Должините на страните на правоаголниот триаголник AOB се $\overline{OA} = \frac{|n|}{2}, \overline{OB} = |n|$ и $\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{n}{2}-0\right)^2 + (0-n)^2} = \frac{|n|\sqrt{5}}{2}$ (**5**).



Бидејќи правата е оддалечена 2 cm од координатниот почеток, висината на триаголникот спуштена од темето O е $h = 2\text{cm}$. Тогаш $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = h \cdot \overline{AB} \Leftrightarrow \frac{|n|}{2} \cdot |n| = 2 \cdot \frac{|n|\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow |n| = 2\sqrt{5}$.

Должините на катетите на правоаголниот триаголник AOB се $\overline{OA} = \frac{|n|}{2} = \sqrt{5}\,\text{cm}$ и $\overline{OB} = |n| = 2\sqrt{5}$ cm. На крај, за плоштината на триаголникот AOB добиваме

$$P_{\Delta AOB}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=5\text{ cm}^2\ (10).$$

Забелешка. Во случај да се заборават апсолутните вредниости, а се друго е во ред, да се одземат само 2 бода.

Решение 2. Каноничната равенка на права со коефициент -2 гласи $y=-2x+n$ (**5**). Вредноста на n ќе ја утврдиме од условот за растојание, при што ќе сметаме, без губење на општоста, дека $n>0$ (т.е. правата го сече позитивниот дел од y – оската). Бидејќи за растојанието d имаме $d=-2$, координатниот почеток O од кој се мери растојанието до правата има координати $x_0=0, y_0=0$ и коефициентите на правата се $a=2$, $b=1$ и $c=-n$, во формулата за растојание од точка до права имаме: $2=\frac{|2\cdot 0+1\cdot 0-n|}{\sqrt{2^2+1^2}}$, од каде следи дека $n=2\sqrt{5}$ (**10**). Значи, равенката на правата е $y=-2x+2\sqrt{5}$. Нека A и B се пресечните точки на дадената права со x и y- оската, соодветно. Ако замениме $y=0$ и $x=0$ во правата, ги добиваме соодветно координатите на пресечните точки $A\left(\sqrt{5},0\right)$ и $B(0,2\sqrt{5})$ (**5**). Триаголникот формиран од дадената права и координатните оски е AOB со катети OA и OB, па за неговата плоштината добиваме: $P_{\Delta AOB}=\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{2}=\frac{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}}{2}=5\text{ cm}^2$. (**5**)

3А,4Б. (Сигма 114, стр. 32, зад. 1530) На шаховски турнир учествуваат две ученички и неколку ученици. Секој со секого одиграл по една партија. Ученичките освоиле заедно 8 поени. Колку ученици имало на натпреварот, ако се знае дека тие освоиле по еднаков број поени?

Решение. Да го означиме бројот на ученици со x. Тогаш вкупниот број учесници на турнирот е $x+2$. Бројот на сите одиграни партии е $\binom{x+2}{2}=\frac{(x+2)(x+1)}{2}$ (**5**). Учениците освоиле по еднаков број поени, секој по y, па тогаш за вкупниот број поени освоен од учениците важи $xy=\frac{(x+2)(x+1)}{2}-8$, од каде се добива квадратна равенка $x^2-(2y-3)x-14=0$, чии решенија се $x_{1,2}=\frac{2y-3\pm\sqrt{(2y-3)^2+56}}{2}$ (**10**). Бидејќи x,y се природни броеви, дискриминантата на квадратната равенка треба да е полн квадрат, па $(2y-3)^2+56=n^2$, односно $(n+2y-3)(n-2y+3)=56$. Се добиваат три системи од кои следните два даваат целобројни решенија: $\begin{cases}n+2y-3=28\\ n-2y+3=2\end{cases}$ и $\begin{cases}n+2y-3=14\\ n-2y+3=4\end{cases}$ (**5**). Од првиот систем го добиваме решението $y=8$, а од вториот систем добиваме $y=4$. Соодветно, бројот на ученици на турнирот е $x=14$ или $x=7$ (**5**).

3Б. Ако $x+y+z=4$, тогаш $x^2+y^2+z^2\geq\frac{16}{3}$. Докажи.

Решение. Навистина, од $(x+y+z)^2=16$ имаме $16=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)$ (**5**). Притоа, познато е дека важат следните неравенства:

$\begin{cases} x^2+y^2\geq 2xy \\ y^2+z^2\geq 2yz \\ x^2+z^2\geq 2xz \end{cases} \Rightarrow \quad 2(x^2+y^2+z^2)\geq 2(xy+yz+xz)$ (**10**). Користејќи ги неравенствата, имаме $16=(x+y+z)^2\leq x^2+y^2+z^2+2(x^2+y^2+z^2) \quad \Leftrightarrow \quad 16\leq 3(x^2+y^2+z^2)$, што требаше и да се покаже (**10**).

4А. Нека c е ненегативен цел број. Дефинираме низа $a_n=n^2+c, n\geq 1$. Нека d_n е најголемиот заеднички делител за a_n и a_{n+1}. Докажи дека $d_n\leq 4c+1, \forall n\geq 1$.

Решение. Бидејќи $d_n \,|\, a_n$ и $d_n \,|\, a_{n+1}$ следува дека $d_n \,|\, a_n+a_{n+1}$, $d_n \,|\, a_n-a_{n+1}$. (**5**) Оттука $d_n \,|\, 2(a_n+a_{n+1})$ и $d_n \,|\, -(a_n-a_{n+1})^2$. (**5**) Дополнително, $d_n \,|\, 2a_n+2a_{n+1}-a_n^2+2a_na_{n+1}-a_{n+1}^2$. (**5**) Од $a_n=n^2+c$ и $a_{n+1}=n^2+2n+c+1$ имаме $2a_n+2a_{n+1}-a_n^2+2a_na_{n+1}-a_{n+1}^2=4c+1$.(**5**) Според тоа добиваме дека $d_n \,|\, 4c+1$, од каде следува дека $d_n\leq 4c+1$. (**5**)