ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020
25.01.2020 год.

Трета година

1А. Реши ја равенката $4-\log x = 3\sqrt{\log x}$.

Решение: Решенијата на дадената равенка ги бараме при услови $\log x \geq 0$ и $4-\log x \geq 0$, од каде дефиниционата област на равенката е $0 \leq \log x \leq 4$, односно $1 \leq x \leq 10000$ (**5**). Тогаш, заради позитивноста на двете страни, квадрираме па добиваме еквивалентни равенки $4-\log x = 3\sqrt{\log x} \Leftrightarrow 16-8\log x + \log^2 x = 9\log x \Leftrightarrow \log^2 x - 17\log x + 16 = 0$ (**10**). Со смена $\log x = t$, последната равенка станува $t^2-17t+16=0$ и има решенија $t=1$ и $t=16$ (**5**). Од тоа што $0 \leq t \leq 4$, следува дека $t=1$, односно $x=10$ (**5**).

1Б. Бројот 18 е напишан како збир на два броја. Да се определат тие броеви така да нивниот производ достигнува најголемата можна вредност.

Решение. Нека двата броја чиј збир е 18, се x и $y=18-x$ (**5**). Треба да определиме за која вредност на променливата *x*, производот на броевите, односно функцијата $f(x)=x(18-x)=-x^2+18x$ достигнува максимум (**10**). Максимумот за квадратната функција, отворена надолу, се достигнува во темето на параболата, односно за $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{18}{-2}=9$ (**5**). Тогаш бараните броеви се $x=9$ и $y=9$ (**5**).

2А, 3Б. (Сигма 114, стр.30, зад. 4) Докажи дека $\left(1+\frac{7}{\sin x}\right)\left(1+\frac{19}{\cos x}\right)>293$, за сите $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\left(1+\frac{7}{\sin x}\right)\left(1+\frac{19}{\cos x}\right)=1+\frac{7}{\sin x}+\frac{19}{\cos x}+\frac{2\cdot 7\cdot 19}{2\sin x\cos x}=$$
$$\stackrel{(10)}{=}1+\frac{7}{\sin x}+\frac{19}{\cos x}+\frac{266}{\sin 2x}\stackrel{(5)}{>}1+7+19+266=293,$$

затоа што $0<\sin x<1, 0<\cos x<1, 0<\sin 2x<1$ (**10**) (за користење на ограничувањата).

2Б. (Сигма 114, стр. 30, зад. 2) Реши ја неравенката $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2x}\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^{2x}\leq\left(\frac{7}{2}\right)^{2x^2+4}$.

Решение. Со трансформации неравенката се сведува на облиците $\left(\frac{7}{2}\right)^{2x}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^{4x}\leq\left(\frac{7}{2}\right)^{2x^2+4}\Leftrightarrow\left(\frac{7}{2}\right)^{6x}\leq\left(\frac{7}{2}\right)^{2x^2+4}$ (**15**). Имајќи во предвид дека $\frac{7}{2}>1$, директно следува дека $6x<2x^2+4\Leftrightarrow x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$ (**10**).

3А, 4Б. Бочните ѕидови на права тристрана призма имаат плоштини $26\text{cm}^2, 28\text{cm}^2, 30\text{cm}^2$. Пресметај го волуменот на призмата, ако нејзината плоштина е 126cm^2.

Решение. Од $2B+26+28+30=126$, добиваме дека плоштината на основата на призмата е $B=21\text{cm}^2$ (**5**). Нека a,b,c се страните на триаголникот кој е основа на призмата и H е висината на призмата. Тогаш, $aH=26, bH=28, cH=30$, од каде $a=\frac{26}{H}, b=\frac{28}{H}, c=\frac{30}{H}$ (**5**). Според Хероновата формула за плоштина на триаголник, $B=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, каде $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{26+28+30}{2H}=\frac{42}{H}$ (**5**). Тогаш,

$$21^2=\frac{42}{H}\cdot(\frac{42}{H}-\frac{26}{H})\cdot(\frac{42}{H}-\frac{28}{H})\cdot(\frac{42}{H}-\frac{30}{H})=\frac{42\cdot16\cdot14\cdot12}{H^4},$$

од каде $H^4=\frac{42\cdot16\cdot14\cdot12}{21^2}=\frac{2\cdot3\cdot7\cdot2^4\cdot2\cdot7\cdot2^2\cdot3}{3^2 7^2}=2^8=(2^2)^4$,

односно $H=2^2=4\text{cm}$. Тогаш, волуменот на призмата е $V=B\cdot H=21\cdot4=84\text{cm}^3$ (**10**).

4А. (Сигма 115, стр. 17, зад. 1) Нека $a<b<c$, $a+c=2b$ и $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$, каде $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}$ и $c=\overline{AB}$ се должините на страните, а r и R се радиусите на впишаната и опишаната кружница на ΔABC. Одреди ја големината на аголот во темето B.

Решение. Од синусната теорема имаме $\frac{b}{\sin\beta}=2R$ т.е. $b=2R\sin\beta$ (**5**). Плоштината на ΔABC е $P=sr=\frac{a+b+c}{2}\cdot r=\frac{abc}{4R}$, од каде со замена на условот $a+c=2b$ се добива: $\frac{3b}{2}\cdot r=\frac{abc}{4R}\Leftrightarrow 6rR=ac$ (**5**). Од косинусната теорема имаме

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta=(a+c)^2-2ac-2ac\cos\beta=(a+c)^2-2ac(1+\cos\beta)=$$
$$=(2b)^2-2\cdot6rR(1+\cos\beta)$$
$$12rR(1+\cos\beta)=3b^2\Leftrightarrow 4rR(1+\cos\beta)=4R^2\sin^2\beta\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r(1+\cos\beta)=R(1+\cos\beta)(1-\cos\beta)$$

(8)

Ако последното равенство го скратиме со $1+\cos\beta$, бидејќи $\beta\neq180^0$, ќе добиеме дека $r=R(1-\cos\beta)$. Од условот на задачата имаме дека $\frac{r}{R}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}=1-\cos\beta$ од каде следува дека $\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ т.е. $\beta=30^0$ (**7**).