ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020
25.01.2020 год.

Втора година

1АБ. (Сигма 114, стр. 29, зад. 3) Реши го системот $\begin{cases} x^2+7x-y+11=0 \\ y^2+3x-y+15=0 \end{cases}$.

Решение. Собирајќи ги двете равенки добиваме

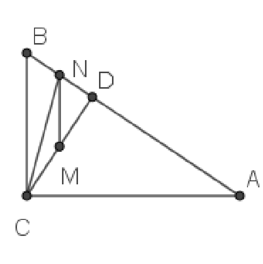
$$x^2+10x+y^2-2y+26=0 \overset{(10)}{\Leftrightarrow} (x+5)^2+(y-1)^2=0 \overset{(10)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x=-5 \\ y=1 \end{cases}.$$

Единственото решение на системот е паротот $(-5,1)$ **(5)**.

2АБ. (Сигма 115, стр. 17. зад. 4) Корените на квадратната равенка $x^2+ax+b+1=0$ се природни броеви. Докажи дека a^2+b^2 е сложен број.
Решение. Користејќи ги Виетовите правила имаме $x_1+x_2=-a$ и $x_1x_2=b+1$ **(5)**. Тогаш $a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=x_1{}^2+x_2{}^2+(x_1x_2)^2+1=(x_1{}^2+1)(x_2{}^2+1)$ **(10)**. Јасно, корените се природни броеви, па множителите се природни броеви $x_1{}^2+1, x_2{}^2+1\geq 2$, од каде a^2+b^2 е сложен број **(10)**.

3А. Најди ги сите комплексни броеви за кои важи $\frac{1}{\operatorname{Re} z}=\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}$.
Решение. Нека $z=a+ib$, каде што a и b се реални броеви. Тогаш $\operatorname{Re} z=a$ и $\bar{z}=a-ib$ и добиваме $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+ib}+\frac{1}{a-ib}$. Јасно, заради условот во задачата $a\neq 0$ **(5)**. Оттука, $\frac{1}{a}=\frac{a-ib+a+ib}{a^2+b^2}=\frac{2a}{a^2+b^2}$ и важи $2a^2=a^2+b^2$, $a^2=b^2$, односно $a=\pm b$ **(15)**. Бараните комплексни броеви го имаат обликот $z=a\pm ia$, каде што a е произволен реален број, различен од нула **(5)**.

4А. Во правоаголен триаголник $(\measuredangle C=90°)$ е повлечена висината CD. Ако точката M е средина на отсечката CD, а N е средина на BD тогаш $AM\perp CN$. Докажи!

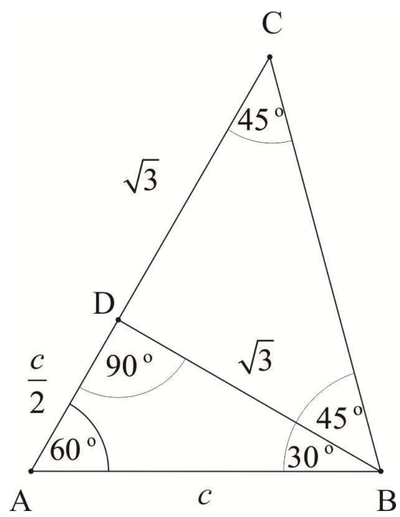


Решение. Од тоа што M и N се средини на CD и BD соодветно следува дека MN е средна линија за триаголникот ΔDBC, па $MN \parallel BC$ **(10)**.
Тогаш $AC\perp BC \Leftrightarrow MN\perp AC$, од друга страна $CD\perp AN$ и оттука следува дека M е ортоцентар за ΔCAN **(10)**, AM е трета висина па $AM\perp CN$ **(5)**.

3Б. Даден е петцифрениот природен број a. Од него го формираме шестцифрениот број b така што од десно, на крајот на бројот a допишуваме 1. Го формираме и шестцифрениот број c така што од лево, на почетокот на бројот a допишуваме 1. Најди го бројот a, ако бројот b е трипати поголем од бројот c.

Решение. Според условите во задачата $b=10a+1$ и $c=100000+a$ (**15**). Бидејќи $b=3c$, добиваме $10a+1=300000+3a$ и оттука $7a=299999$, односно $a=42857$ (**10**).

4Б. Аглите во триаголникот ABC се $\alpha=60^\circ, \beta=75^\circ$. Ако висината спуштена од темето B изнесува $\sqrt{3}$ cm, пресметај ја плоштината на триаголникот.



Решение. Нека висината спуштена од темето B е отсечката BD, $\overline{BD}=\sqrt{3}$ cm. Тогаш $\angle DBC=45^\circ$, триаголникот DBC е рамнокрак правоаголен и затоа $\overline{DC}=\sqrt{3}$ cm (**7**). Од правоаголниот триаголник ABD со остри агли 60° и 30°, следува дека $\overline{AD}=\frac{c}{2}$, каде што $\overline{AB}=c$ (**5**). Од Питагоровата теорема за триаголникот ABD имаме $c^2-\frac{c^2}{4}=3$ и оттука $c^2=4$, односно $c=2$ cm (**5**). Добиваме дека $\overline{AC}=1+\sqrt{3}$ cm и затоа за плоштината на триаголникот ABC добиваме $\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}=\frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}+3}{2}$ cm^2 (**8**).