ОПШТИНСКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 2020
25.01.2020 год.

I година

1А, 2Б. (Сигма 115, стр. 16, зад. 4) Пресметај ја разликата на изразите $1^2+2^2+3^2+...+2020^2$ и $1\cdot3+2\cdot4+...+2019\cdot2021$.

Решение 1. Ќе го трансформираме вториот израз на следниот начин:

$$1\cdot3+2\cdot4+...+2019\cdot2021=(2-1)\cdot\left(2+1\right)+(3-1)\cdot\left(3+1\right)+...+(2020-1)\cdot\left(2020+1\right)\overset{(10)}{=}$$
$$=2^2-1+3^2-1+...+2020^2-1=1^2+2^2+...+2020^2-2020.\mathbf{(10)}$$

Јасно, сега разликата на двата изрази е еднаква на

$$1^2+2^2+\cdots+2020^2-\left(1\cdot3+2\cdot4+\cdots+2019\cdot2021\right)=$$
$$=1^2+2^2+\cdots+2020^2-(1^2+2^2+\cdots+2020^2-2020)=2020.\mathbf{(5)}$$

Решение 2. Ги групираме собироците и извлекуваме заеднички множител пред заграда, па имаме

$$1^2+2^2+\cdots+2019^2+2020^2-\left(1\cdot3+2\cdot4+\cdots+2019\cdot2021\right)=$$
$$=(1^2-1\cdot3)+(2^2-2\cdot4)+...+(2019^2-2019\cdot2021)+2020^2\overset{(5)}{=}$$
$$=1\cdot(1-3)+2\cdot(2-4)+\cdots+2019\cdot\left(2019-2021\right)+2020^2\overset{(5)}{=}$$
$$=-2\cdot(1+2+\cdots+2019)+2020^2\overset{(5)}{=}-2\cdot\frac{2019\cdot2020}{2}+2020^2\overset{(5)}{=}$$
$$=2020\cdot(-2019+2020)=2020.\mathbf{(5)}$$

1Б. Во два сада има вкупно 35 литри вода. Ако од првиот сад претуриме во вториот сад онолку вода колку што има во вториот сад, тогаш во првиот сад ќе има пет литри повеќе вода отколку во вториот. Одреди ја почетната количина на вода во садовите.

Решение. Нека на почетокот во првиот сад има x литри вода, а во вториот сад има y литри вода. Тогаш, имаме дека $x+y=35$ **(5)** и $x-y=2y+5$ **(5)**. Системот $\begin{cases}x+y=35\\x-y=2y+5\end{cases}$, има решенија $x=27,5$ и $y=7,5$, значи на почетокот во првиот сад имало 27,5 литри вода, а во вториот сад имало 7,5 литри вода **(15)**.

2А. На натпреварите на еден фудбалски турнир за победа се добива еден поен, за пораз се губи поен, а нерешениот резултат не ги менува поените. Фудбалскиот тим на Дарко на крајот од првите 20 одиграни натпревари имал 15 поени, а по уште 25 одиграни натпревари завршил со 37 поени. Покажи дека барем еден натпревар во последните 25 натпревари за тимот на Дарко завршил нерешено.

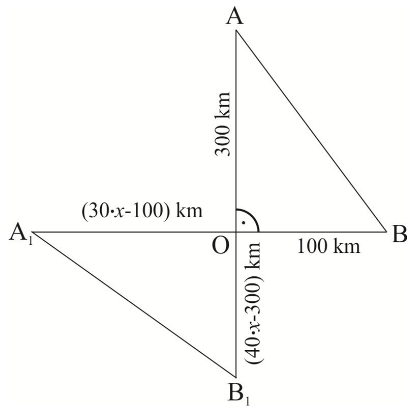
Решение. Во последните 25 натпревари, тимот на Дарко успеал да освои уште 37 – 15 = 22 поени **(5).** Нека во последните 25 натпревари, тимот на Дарко победил во x натпревари, а изгубил во y натпревари и ниту еден натпревар не завршил со нерешен резултат. Тогаш, го добиваме системот $\begin{cases} x+y=25 \\ x-y=22 \end{cases}$ **(10).** Овој систем нема целобројни решенија, од каде заклучуваме дека барем еден натпревар во последните 25 натпревари, за тимот на Дарко, завршил нерешено **(10).**

3Б. (Сигма 114, стр. 29, зад. 4) Дали може броевите од 1 до 555 да се поделат на четири групи, така што збирот на броевите од втората група е за 10 поголем од збирот на броевите во првата група, збирот на броевите од третата група да е за 10 поголем од збирот на броевите во втората група и збирот на броевите од четвртата група да е за 10 поголем од збирот на броевите во третата група?

Решение. Нека S е збирот на броевите од првата група. Тогаш збирот на броевите од сите четири групи изнесува $S+(S+10)+(S+20)+(S+30)=4\cdot S+60$. Овој збир е делив со 4 (**12**). Од друга страна, збирот на броевите од 1 до 555 изнесува $1+2+3+.....+555=\frac{555\cdot(555+1)}{2}=555\cdot 278=154290$. Но, овој број не е делив со 4, па бараната поделба не е можна (**13**).

3А, 4Б. Бродовите А и В се движат по праволиниски патеки нормални една на друга, кои се сечат во замислена точка О. Бродот А е одалечен 300 km од точката О и се движи со брзина од 40 km/h, а бродот В е одалечен 100 km од точката О и се движи со брзина од 30 km/h. И двата брода се движат во насока кон точката О. Бродовите се доволно далеку од брегот, така што по одредено време растојанието меѓу нив повторно ќе стане еднакво со почетното растојание. По колку часа ќе се случи тоа?

Решение. Нека A и B се точките во кои се наоѓаат бродовите на почетокот. Тогаш, триаголникот AOB е правоаголен со катети $\overline{OA}=300\,km$ и $\overline{OB}=100\,km$, па за почетното растојание $\overline{AB}$ имаме $\overline{AB}^2=\overline{OA}^2+\overline{OB}^2=300^2+100^2=100000$ (**5**). Нека после x часа, растојанието меѓу бродовите повторно е еднакво на почетното растојание. Во тој момент и двата брода ќе ја имаат поминато точката О, и ќе бидат во точките A_1 и B_1 соодветно, кои се на растојание $\overline{OA_1}=40x-300$ и $\overline{OB_1}=30x-100$ од точката О (види цртеж.) (**5**).



Тогаш, за растојанието $\overline{A_1B_1}$ имаме $\overline{A_1B_1}^2=\overline{OA_1}^2+\overline{OB_1}^2=(40x-300)^2+(30x-100)^2$ и од $\overline{A_1B_1}=\overline{AB}$, добиваме дека $(40x-300)^2+(30x-100)^2=100000$ **(5).** По средување на изразот добиваме дека $x^2-12x=0$ **(5),** односно $x(x-12)=0$. Бидејќи времето $x>0$ имаме дека $x-12=0$, односно дека по $x=12$ часа, растојанието меѓу бродовите повторно ќе биде еднакво на почетното (**5**).

4А. (Сигма 114, стр. 31, зад. 1519) Еден четирицифрен број е делив со 7 и 19. Кога тој број ќе го помножиме со 29 и го поделиме со 41 се добива остаток 39. Кој е тој број?

Решение. Ако бројот е делив со 7 и со 19, тогаш постои природен број a, таков што нашиот четирицифрен број е еднаков на $7 \cdot 19 \cdot a = 133 \cdot a$ (**3**)**.** Од условот на задачата важи дека постои природен број x, таков што $133a \cdot 29 = 41x + 39$ (**5**), односно $x = \frac{133a \cdot 29 - 39}{41} = 94a - 1 + \frac{3a+2}{41}$. (**5**) Од $\frac{3a+2}{41} \in \mathbb{N}$ имаме дека $3a + 2 = 41k$, за некој природен број k. Сега од тоа што бараниот број е четирицифрен, следи дека $1000 \leq 133a \leq 9999$, односно $8 \leq a \leq 75$, од каде $26 \leq 3a + 2 \leq 227$, па $3a + 2 \in \{41, 82, 123, 164, 205\}$. (**7**) Бидејќи само бројот 41 дава остаток 2 при делење со 3, следи дека $3a + 2 = 41$, односно $a = 13$. Бараниот четирицифрен број е $7 \cdot 19 \cdot 13 = 1729$ (**5**).